



# La table d'harmonie du piano - Études modales en basses et moyennes fréquences

Kerem Ege

## ► To cite this version:

Kerem Ege. La table d'harmonie du piano - Études modales en basses et moyennes fréquences. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Polytechnique X, 2009. Français. NNT : . tel-00460783v3

**HAL Id: tel-00460783**

**<https://theses.hal.science/tel-00460783v3>**

Submitted on 29 Apr 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité : Mécanique

présentée par

**Kerem EGE**

Sujet :

---

## *La table d'harmonie du piano – Études modales en basses et moyennes fréquences*

---

préparée

au LABORATOIRE DE MÉCANIQUE DES SOLIDES (CNRS UMR 7649)

Soutenue le 9 décembre 2009 devant le jury composé de

Antoine CHAIGNE	Professeur, ENSTA ParisTech	Président
François GAUTIER	Professeur, Université du Maine	Rapporteur
Mohamed ICHCHOU	Professeur, École Centrale de Lyon	Rapporteur
José Vieira ANTUNES	Chercheur Principal, Institut Technologique Nucléaire, Portugal	Examineur
Bertrand DAVID	Maître de conférences, TELECOM ParisTech	Examineur
Xavier BOUTILLON	Directeur de recherche au CNRS, École Polytechnique	Directeur de thèse



*À Roberta,*





# Remerciements

Je tiens avant tout à remercier vivement Xavier BOUTILLON pour m’avoir accordé sa confiance pendant ces trois années passées sous sa direction. Je lui suis très reconnaissant pour la disponibilité et la patience dont il a fait preuve. Sa rigueur intellectuelle et sa compréhension de la musique m’ont guidé tout au long de ma démarche scientifique. Ce fut un vrai plaisir pour moi de travailler avec Xavier sur ce sujet et j’ai la certitude que nos collaborations futures seront toutes aussi sympathiques et fructueuses.

Je remercie mes rapporteurs, François GAUTIER et Mohamed ICHCHOU, pour le grand intérêt qu’ils ont porté à ce travail et pour la rapidité avec laquelle ils ont bien voulu lire le manuscrit ; je remercie également José ANTUNES de m’avoir fait l’honneur de participer à mon jury de thèse. Leurs commentaires, leurs critiques et les discussions qui ont suivis me seront très précieux pour ma recherche future.

J’exprime mes sincères remerciements à Antoine CHAIGNE qui a accepté de présider mon jury. Je sais tout l’enthousiasme et l’attention avec lesquels il a suivi ce travail. Ce fut une réelle chance pour moi de l’avoir rencontré peu avant le début de cette thèse et je suis conscient de l’importance qu’a eu cette expérience sur mes choix scientifiques et mon parcours.

Ce travail n’aurait pu voir le jour sans les conseils et l’aide constants de Bertrand DAVID. Mes nombreuses questions relatives aux méthodes de traitement du signal ont ainsi toujours trouvé réponses grâce à lui.

Passons maintenant aux nombreuses personnes qui n’apparaissent pas en première page de ce manuscrit mais qui ont participé – de près ou de loin et de leur manière – au bon déroulement de cette thèse. Je tiens pour commencer à saluer le savoir-faire et l’expérience de Jean-François CARON ; je n’aurais jamais songé qu’une table d’harmonie de violon en matériau composite aurait pu voir le jour en si peu de temps. Merci pour le temps qu’il a passé sur ce sujet et pour sa perpétuelle bonne humeur. Je remercie à ce propos les étudiants de l’X, Stéphane MARCADET et Hugo MARTIN ainsi que les luthiers de la *rue de Rome*, Matthieu et François, pour avoir mené avec brio ce projet expérimental. Merci également à Stephen PAULELLO et Claire PICHET, pour leur accueil dans ce si bel atelier de pianos d’exception. La collaboration qui se met en place avec Xavier, Jean-François, Stephen et Claire s’annonce passionnante.

Merci bien sûr à Bernard HALPHEN et à tous les membres du LMS. La gentillesse et la générosité de William (ainsi que ses entraînements de foot mémorables...), l'esprit pratique d'Erik, les disponibilités d'Ali, Vincent, Raymond, Hakim, Daniel, Jean-François, les sourires d'Alexandra et de Christiane me manqueront. Je remercie Jean-Marc pour son soutien et ses nombreuses pauses... Merci également à Marc BONNET pour son aide et ses intelligentes remarques concernant mes slides de soutenance. Je remercie par ailleurs le service *exploitation* de l'X, pour avoir bien voulu me fournir le matériel manquant à mes mesures. J'exprime également ma gratitude à Claude BASDEVANT du LMD pour m'avoir permis de finir mes derniers mois de thèse sans encombre.

Trois années passées dans un laboratoire forgent de belles amitiés. Je tire mon chapeau aux talents de Marc R. : qu'ils soient scientifiques, musicaux, culinaires... Merci à ma collègue de bureau Waad et à ses baklavas de là-bas, à la bonté de Cédric B., à Nicolas A. et ses bons restos, à Tommaso, Eva, Umut, Mathieu, Eric, Albert, Camille B., Fabien E., Raman, Pierre, Camille C., Franck, Aurélie, Maria Paola. Sans oublier les anciens : Michel, José, Arnaud, Damien, Nicolas R., Fabien S., Stéphanie, Lorenzo, Martine. La cafette, la *belette qui tête*, la fanfare à Gérard et les directives sévères du meilleur capitaine que l'OLMS ait connu – Ionut – me manqueront. J'ai une pensée particulière aux compagnons de galère : Musto, Frédérick, Lionel, Fede. L'expérience fut longue et difficile mais elle vaut le coup ! Courage à ceux qui sont prêt du but : Van, Bastien, Romain, Alessandra, Matteo, David, Cécile, Françoise. Comme dit la *Comtesse* dans son *Album* : *s'il est vrai qu'il est parfois dur de travailler sans cesse et sans fin ; au final, la thèse donne un sacré bonus !*

Le goût que j'ai pour la recherche tire ses origines entre autres dans les moments forts passés au LMA et à l'UME. Je tiens à remercier à ce propos les collègues de Marseille – Christophe et Fabrice – ainsi que ceux de l'ENSTA : Kevin, Cédric, Samuel, Nicolas Q., Thierry, Nicolas B., Olivier, Karine, Lionel, Virginie et enfin Cyril qui m'a accordé sa confiance pour la suite.

Je ne saurais trop remercier mes amis de toujours – Romain et Vincent – pour leur beau témoignage d'amitié en ce jour de soutenance. Merci aux délires des *potes de Marseille* et autres *Sumosdesatan* – Pedro, Sélim, Jaime, Mehdi, Rémy, Yann – ainsi qu'à l'affection constante des *anciens* de Strasbourg : Nico, Véro, Tritchou, Cem, Adrien.

Le soutien sans faille que je reçois depuis toujours de la part de ma famille est pour moi source de bonheur, joie et fierté. Mon père, ma mère et ma sœur ont su m'encourager dans ma voie, me reconforter dans mes choix tout en me témoignant leur tendresse profonde. Ma curiosité, mon désir de comprendre et mon goût pour la musique viennent de là. Je leur en suis extrêmement reconnaissant. Un doux merci également à mes grands parents, oncles, tantes, cousins et autres amis de la famille qui sont tout près de moi tout en étant loin : *herkese teşekkür ederim*. Pour finir, mes derniers mots iront vers Roberta qui a supporté mes angoisses et mes doutes et qui a su m'apporter du réconfort et de l'espoir même dans les moments les plus difficiles de cette aventure. Son écoute constante et son optimisme de tous les jours m'ont permis de relativiser et d'avancer. Elle sait que je lui dois beaucoup. *Un grande grazie a te e un pensiero dolce a Gina e Damiano.*

# Résumé

L’objectif de cette thèse est l’étude du comportement vibratoire de la table d’harmonie du piano dans le domaine des moyennes fréquences. Le premier chapitre est consacré à la table dont on présente le rôle, la structure et les matériaux. Les principaux résultats publiés sont regroupés sous forme d’une synthèse bibliographique.

Dans un second chapitre, nous présentons une nouvelle méthode d’analyse modale dite *haute résolution*, permettant de s’affranchir des limitations naturelles de l’analyse de Fourier en termes de résolution spectrale. Celle-ci est validée par comparaison des analyses modales partielles expérimentales et théoriques de plaques minces en aluminium pour des recouvrements modaux compris entre 30% et 70%.

Grâce à cette nouvelle méthode, l’identification modale, complète ou partielle, d’une table de piano droit est donnée dans les moyennes fréquences [300-2500 Hz]. L’obtention de l’amortissement moyen propre à la table en épicea constitue un résultat nouveau dans ce domaine de fréquences. Par ailleurs, l’observation de la densité modale permet de préciser la validité du remplacement de la table raidie par une plaque homogène jusqu’à 1.1 kHz environ. Au-dessus de cette fréquence, la table se comporte comme une juxtaposition de guides d’ondes. L’observation des déformées modales pour ces fréquences, obtenues par un modèle en éléments finis, confirme la localisation des ondes entre les raidisseurs. Le phénomène de coïncidence acoustique se trouve alors profondément modifié par rapport à celui ayant cours pour les plaques minces.

L’objectif du dernier chapitre est de proposer une description synthétique d’une table d’harmonie basée sur un petit nombre de *descripteurs globaux* : densité modale, amortissement moyen, espacement inter-raideurs. La validité d’un modèle de plaque homogène équivalente est étudiée et le remplacement de la structure par une plaque en matériau composite est envisagé. La description synthétique permet par exemple d’évaluer les variations de la mobilité au chevalet et du rayonnement dans l’aigu entraînée par une modification de structure (espacement inter-raideurs, épaisseur moyenne).

**Mots clés :** table d’harmonie du piano, analyse modale, vibrations aux moyennes fréquences, rayonnement, acoustique musicale, mécanique des instruments de musique.



# Abstract

The vibratory behaviour of the piano soundboard in the mid-frequency domain is studied in this PhD thesis. The first chapter is devoted to the board itself: its role, structure and materials. An exhaustive bibliographical study is presented and the main published results are given and synthesised.

The second chapter introduces a new modal analysis technique based on a high-resolution analysis algorithm. The technique resolves cases where the Fourier transform performs poorly due to its natural  $\Delta T \Delta f$  limitation. This new method is assessed by comparing experimental and theoretical partial modal analyses of aluminium thin plates up to a modal overlap of 70%.

The modal identification of an upright piano soundboard is partly achieved with this method in the mid-frequency domain [300-2500 Hz]. The estimation of the mean loss-factors of the spruce board in this frequency domain is a new result. The frequency dependency of the observed modal density of the ribbed-board below 1.1 kHz contributes to define an equivalent homogeneous plate. Above 1.1 kHz, the soundboard behaves like a set of waveguides. The modal shapes obtained through a finite-element model confirm the localisation of the waves between the ribs. On such a structure, the acoustical coincidence phenomenon is deeply modified in comparison to the one occurring in thin plates.

The purpose of the last chapter is to propose a synthetic description of a piano soundboard based on a small number of global descriptors: overall dimensions, aspect ratio, mass, modal density, mean loss factor, average distance between two consecutive ribs. The validity of an equivalent homogeneous plate model is studied and the replacement of the structure by a plate in composite material is considered. The synthetic description can be used to predict the changes of the driving-point mobility (at bridge) and of the sound radiation in the treble range resulting from structural modifications (changes in material, geometry, average ribs spacing, etc.).

**Keywords:** piano soundboard, modal analysis, mid-frequency domain vibrations, sound radiation, musical acoustics, mechanics of musical instruments



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>Chap. 1 La table d’harmonie du piano</b>	<b>5</b>
1 Description	5
1.1 Fonctions acoustique et statique	5
1.2 Matériau	7
1.2.1 Quotient de rayonnement et diagramme d’Ashby	7
1.2.2 Bois de résonance – L’épicéa	9
1.3 La structure	13
1.3.1 Raidisseurs	14
1.3.2 Variation d’épaisseur	15
1.3.3 Chevalets	15
2 Synthèse bibliographique sur les vibrations et le rayonnement	15
2.1 Comportement vibratoire aux fréquences basses	15
2.1.1 Fréquences modales (Wogram, Nakamura, Suzuki, Kindel, Conklin, Dérogis, Berthaut, Moore, Ege)	16
2.1.2 Densité modale	18
2.1.3 Amortissements modaux (Suzuki, Dérogis, Berthaut, Ege)	20
2.1.4 Déformées modales	20
2.2 Comportement vibratoire aux moyennes et hautes fréquences	22
2.2.1 Vibrations <i>inter-raisseurs</i>	22
2.2.2 Modes propagatifs (Berthaut)	23
2.3 Mobilité mécanique (admittance)	23
2.3.1 Inadaptation d’impédance	23
2.3.2 Mesures aux chevalets (Wogram, Nakamura, Conklin, Giordano)	24



2.4	Rayonnement acoustique .....	28
3	Conclusion .....	29
<b>Chap. 2 Analyse modale aux moyennes fréquences : Méthode et validation</b>		<b>31</b>
1	Techniques d'identification des structures .....	32
1.1	Domaines fréquentiels – Transitions.....	32
1.2	Méthodes d'identification modale .....	33
1.3	Modèles prédictifs hautes fréquences – SEA.....	34
2	Proposition d'analyse modale haute résolution .....	35
2.1	Les méthodes paramétriques haute résolution.....	35
2.2	Applications en acoustique musicale et en vibrations des structures .....	36
2.3	La méthode .....	37
2.3.1	Schéma-bloc .....	38
2.3.2	Blanchiment du bruit .....	39
3	« High-resolution modal analysis » (article publié par le JSV).....	40
4	Limitations de la méthode – Perspectives .....	59
4.1	Incertitudes sur la position d'impact et l'angle d'impact .....	59
4.2	Rapport signal à bruit.....	59
5	Conclusion .....	60
<b>Chap. 3 Études modales d'une table d'harmonie de piano droit</b>		<b>61</b>
1	Modes propres et densité modale .....	62
1.1	Modes propres de la plaque orthotrope simplement supportée.....	62
1.2	Densité modale.....	63
1.2.1	Plaque isotrope .....	64
1.2.2	Plaque orthotrope.....	66
1.2.3	Influence des conditions aux limites sur la densité modale.....	69
2	Estimation modale d'une table d'harmonie – Application de l'analyse modale haute résolution .....	74
2.1	Linéarité de la réponse dynamique.....	75
2.1.1	Méthode de séparation linéaire / non linéaire (Farina, Rébillat).....	76
2.1.2	Résultats.....	78

2.2	Paramètres modaux estimés entre 0 et 550 Hz (excitation impulsionnelle) . . . . .	80
2.2.1	Fréquences et amortissements modaux . . . . .	81
2.2.2	Déformées modales . . . . .	84
2.3	Paramètres modaux estimés entre 500 Hz et 2.5 kHz (excitation continue) . . . . .	87
2.3.1	Validation du protocole expérimental . . . . .	88
2.3.2	Facteurs d'amortissement et densité modale . . . . .	88
3	Comparaison avec un modèle en éléments finis de la table raidie . . . . .	91
4	Conclusion . . . . .	96
 <b>Chap. 4 Description synthétique d'une table d'harmonie de piano</b>		<b>99</b>
1	Plaque homogène équivalente . . . . .	100
1.1	Homogénéisation des plaques raidies – Calcul proposé par Berthaut . . . . .	100
1.2	Application à la table d'harmonie – Modèle en éléments finis de la table homogène équivalente . . . . .	101
1.3	Plaque isotrope . . . . .	103
2	Modèle minimal . . . . .	106
2.1	Densité modale et admittance au chevalet . . . . .	106
2.1.1	Expressions analytiques de l'admittance mécanique : sommation modale et <i>mean-value method</i> . . . . .	106
2.1.2	Application . . . . .	111
2.2	Guide d'onde <i>inter-raideurs</i> en moyennes et hautes fréquences . . . . .	114
2.2.1	Construction du modèle - Relation de dispersion du guide et densité modale	114
2.2.2	Conséquences sur le rayonnement . . . . .	117
3	Discussion sur les facteurs susceptibles d'influencer la sonorité dans l'aigu . . . . .	119
3.1	Rayonnement dans l'aigu . . . . .	119
3.2	Mobilité de la table dans l'aigu . . . . .	120
4	Remplacement de la table d'harmonie par une structure en matériau composite . . . . .	121
4.1	Substitution de l'épicéa par un matériau composite dans les instruments de musique . . . . .	121
4.2	Exemple d'étude sur la table d'harmonie du violon – Remplacement de la structure par un sandwich balsa/fibre de lin . . . . .	123
4.3	Solutions envisageables pour le piano . . . . .	126

5 Conclusion .....	128
<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>129</b>
<b>Annexe A Vibrations en flexion des plaques élastiques</b>	<b>133</b>
1 Plaque mince – Modèle de Love-Kirchhoff.....	133
2 Plaque épaisse – Modèle de Reissner-Mindlin .....	138
3 Comparaison des deux modèles .....	141
<b>Annexe B Formalisme modal</b>	<b>145</b>
1 Système conservatif.....	145
2 Système dissipatif .....	147
<b>Annexe C Effet de la précontrainte sur les modes propres et la densité modale</b>	<b>149</b>
<b>Annexe D Extension au cas des coques minces sphériques</b>	<b>153</b>
<b>Annexe E Mécanismes dissipatifs dans les plaques</b>	<b>155</b>
1 Pertes internes .....	155
1.1 Viscoélasticité du bois.....	156
1.2 Thermoélasticité dans les plaques métalliques.....	158
2 Amortissement par rayonnement.....	159
2.1 Rayonnement d’une plaque mince infinie.....	160
2.2 Efficacités modales de rayonnement.....	162
<b>Bibliographie</b>	<b>167</b>

# Introduction générale

## Problématique et objectifs de cette étude

La table d’harmonie du piano est une pièce d’épicéa mise en vibration par les cordes pour permettre un rayonnement efficace du son. Sur le plan acoustique, c’est la pièce maîtresse de l’instrument : elle facilite le transfert d’énergie entre la corde (dont l’efficacité de rayonnement est très mauvaise du fait de sa petite section) et le fluide environnant (l’air).

En première approximation, il s’agit d’une structure plane constituée d’une plaque en bois (matériau orthotrope) raidie par plusieurs barres rectilignes régulièrement espacées sur toute sa surface, par deux barres courbes supplémentaires de plus forte raideur (chevalets), lieux de couplage des cordes et de transmission de leur mouvement, et enfin d’une ou de deux barres d’angle délimitant des zones dites *mouchoirs* où la vibration est *a priori* moins importante. La fonction de la table est donc double : dynamiquement elle doit rayonner efficacement dans le fluide ambiant et statiquement elle doit résister à une importante charge verticale (pour un piano à queue) répartie le long des chevalets. Cette charge correspond à une fraction de la tension des cordes qui, au point de leur passage par le chevalet, forment un angle dans un plan vertical (pour un piano à queue) afin d’y demeurer en appui en toutes circonstances (voir la figure 1.1).

La conception des tables d’harmonie est le fruit d’un empirisme qui s’est exercé sur le piano dans son ensemble (clavier, marteaux, plan de cordes, table, cadre, meuble) et a produit le résultat actuel, à peu près stabilisé depuis 1900, et où tous les aspects sont assez étroitement interdépendants. Cependant, les règles de dimensionnement ainsi obtenues ne permettent pas de connaître par exemple quel serait l’effet sonore d’un changement de la répartition des barres ou d’un changement de matériau, de taille, d’épaisseur, de forme, etc.

Les problèmes posés au facteur sont donc de deux ordres : certains aspects de l’instrument restent peu satisfaisants (même si on s’y est plus ou moins habitué) et l’empirisme traditionnel est trop coûteux et sans doute inefficace pour faire aboutir avec succès des modifications significatives. Sans mentionner les nombreuses questions ponctuelles, citons plutôt deux questions concrètes globales, sans réponse à l’heure actuelle :

- comment améliorer le fonctionnement de la table pour les notes aiguës (timbre insatisfaisant) ?
- quel parti sonore peut-on tirer du remplacement du bois par une structure composite ?

Contrairement aux instruments à cordes frottées, où l'énergie est *entretenu* par le mouvement de l'archet, le pianiste n'a pas de contrôle *en continu* sur l'excitation de la corde (et donc sur le son) une fois le marteau échappé. L'énergie cinétique acquise par celui-ci ne peut plus être modifiée et c'est *libre* qu'il vient frapper la corde et la mettre en vibration. La conception du piano est donc fonction du compromis choisi entre l'amplitude du son et sa durée : doit-on dissiper beaucoup d'énergie tout d'un coup, ou moins mais plus longtemps ? Une bonne *adaptation d'impédance* sur toute la tessiture de l'instrument entre la source (la corde) et le consommateur (la table d'harmonie) d'énergie est difficile à réaliser. La question du compromis intensité/tenue et de la dissipation de l'énergie se pose d'ailleurs en ces termes pour tous les instruments à cordes pincées (clavecin, guitare, etc.). Dès lors, l'analyse vibratoire de ces instruments doit porter en particulier sur la caractérisation des amortissements et sur leurs causes.

Le clavier du piano est composé de quatre-vingt huit touches qui vont du **La<sub>-1</sub>** au **Do<sub>7</sub>** : la gamme d'excitation de la table s'étend donc de 27.5 Hz à 4186 Hz pour les fréquences fondamentales des notes jouées et bien au-delà pour leurs partiels. Cependant, rares sont les analyses modales de tables d'harmonie de piano publiées dépassant les 200 Hz ; pour des fréquences plus élevées on ne dispose globalement que de quelques mesures de mobilité au chevalet menées sur un petit nombre d'instruments<sup>1</sup>. Du point de vue scientifique, il est tentant d'essayer de caractériser la structure plus globalement par la mesure de paramètres vibratoires comme l'amortissement ou la densité modale à des fréquences plus élevées (supérieures à 500 Hz). Par ailleurs un second enjeu est de tenter d'étendre à l'ensemble de la tessiture du piano une démarche prédictive permettant d'optimiser les propriétés dynamiques de la table d'harmonie afin de chercher à concilier, de manière satisfaisante pour l'oreille sur l'ensemble des partiels, les impératifs de puissance acoustique et de longueur de son.

C'est dans cette problématique que s'inscrit cette thèse de doctorat.

Notre principal objectif est l'étude du comportement vibratoire de la table dans le domaine des moyennes fréquences. Les méthodes traditionnelles d'analyse modale basées sur la transformée de Fourier sont limitées au domaine des basses fréquences, où la réponse dynamique d'une structure présente des résonances très prononcées. Lorsque la fréquence augmente, le recouvrement modal augmente en général, d'une part parce que les modes finissent toujours par se densifier, d'autre part parce que l'amortissement augmente ; en définitive, les résonances sont de moins en moins prononcées. La résolution liée au fenêtrage temporel du signal rend les méthodes traditionnelles basées sur l'analyse de Fourier mal adaptée pour estimer les modes dont l'écart fréquentiel est proche de l'élargissement spectral dû à l'amortissement. L'analyse vibratoire des structures dans ce domaine fréquentiel fait l'objet de recherches intensives dans la communauté scientifique. Ce domaine est appréhendé tantôt par des approches modales appropriées, tantôt par des approches propagatives. Dans cette thèse, nous avons choisi de garder une représentation modale du problème, valide en théorie sur tout le spectre pour un système linéaire amorti. L'identification modale de la table aux moyennes fréquences passe par le développement de nouvelles méthodes permettant de

---

<sup>1</sup>Portant sur un seul instrument, cette étude ne changera pas cet état de fait.

s'affranchir des limitations de la transformée de Fourier.

Un second objectif de notre travail est de donner une description synthétique de la table permettant par exemple d'évaluer les variations de mobilité au chevalet ou de puissance acoustique rayonnée entraînées par une modification de structure. Pour y parvenir, les paramètres pertinents dans la dynamique de la table doivent être correctement identifiés. Cela suppose au préalable d'avoir convenablement modélisé le comportement vibratoire de la structure pour les différents domaines fréquentiels d'intérêts.

## Plan du manuscrit

Ce manuscrit se divise en quatre parties. Le chapitre 1 est consacré à la table d'harmonie du piano dont on présente le rôle, la structure et les matériaux. Une synthèse bibliographique approfondie sur les vibrations et sur le rayonnement de la table est menée. Elle regroupe les principaux résultats publiés, en général sous forme d'articles scientifiques, mais aussi de brevets ou d'actes de congrès. Cette synthèse part d'un constat : depuis l'article de revue de Suzuki publié en 1990 et portant sur l'acoustique du piano dans sa globalité [116], des résultats importants ont été publiés sur la vibro-acoustique de la table d'harmonie du piano par Conklin [35], Dérogis [44], Giordano [55], Berthaut [13] et Moore & Zietlow [92]. Dès lors, il nous a paru important de dresser un état de l'art des connaissances disponibles à ce jour sur le sujet afin de situer notre travail et nos résultats par rapport aux études précédentes.

La nouvelle méthode d'analyse modale haute résolution que nous avons développée est exposée dans le chapitre 2. Premièrement une définition des différents domaines fréquentiels est donnée et les principales techniques d'identification des structures sont mentionnées. La méthode paramétrique haute résolution est ensuite présentée en détail puis validée par comparaison des analyses modales partielles expérimentales et théoriques de plaques minces en aluminium dans le domaine des moyennes fréquences, pour des recouvrements modaux compris entre 30% et 70%.

Le chapitre 3 porte sur l'identification modale d'une table d'harmonie de piano droit placée dans une chambre semi-anéchoïque. Deux études modales – par excitation impulsionnelle et par excitation continue – sont menées. Grâce à la nouvelle méthode d'analyse modale haute résolution, l'estimation des paramètres modaux de la structure est rendue possible jusqu'à 2.5 kHz environ. L'observation d'une densité modale constante jusqu'à 1.1 kHz environ suggère que la table raidie se comporte comme une plaque homogène dans ce domaine fréquentiel. Au-dessus de cette fréquence, la demi-longueur d'onde des ondes se propageant perpendiculairement aux raidisseurs devient plus petite que l'espacement inter-raideurs. On observe que la localisation des ondes entre les raidisseurs se traduit par une diminution sensible de la densité modale estimée. Le chapitre se conclut par une comparaison des résultats expérimentaux avec ceux obtenus numériquement par un modèle éléments finis de la table raidie.

Le dernier chapitre a pour objectif de donner une description synthétique de la table d'harmonie du piano. La validité d'un modèle de plaque homogène équivalente à la table raidie est étudiée,



Piano à queue de concert *C. Bechstein*. Model **D-280**. [HTTP ://WWW.BECHSTEIN.DE/](http://www.bechstein.de/)

# Chapitre 1

## La table d'harmonie du piano

### Sommaire

---

<b>1 Description</b> .....	<b>5</b>
1.1 Fonctions acoustique et statique .....	5
1.2 Matériau .....	7
1.3 La structure .....	13
<b>2 Synthèse bibliographique sur les vibrations et le rayonnement</b> .....	<b>15</b>
2.1 Comportement vibratoire aux fréquences basses .....	15
2.2 Comportement vibratoire aux moyennes et hautes fréquences .....	22
2.3 Mobilité mécanique (admittance) .....	23
2.4 Rayonnement acoustique .....	28
<b>3 Conclusion</b> .....	<b>29</b>

---

La pièce centrale de notre étude est la table d'harmonie du piano. Ce chapitre présente tout d'abord le rôle, le matériau et la structure d'une table de piano. Les principaux résultats publiés sur le comportement vibratoire et le rayonnement de la structure sont ensuite regroupés sous la forme d'une synthèse bibliographique.

Ce chapitre représente une partie d'un article portant par ailleurs sur des résultats présentés dans les parties suivantes. Initialement rédigé en anglais, nous l'avons reproduit tel quel plutôt que d'en effectuer une traduction.

## 1 Description

### 1.1 Acoustical and statical functions

A piano string is not capable of radiating sound by itself due to its small diameter ( $\approx 1$  mm) compared to the wavelengths of sound at the frequencies of interest. Thus, it is coupled to a much larger object, the soundboard (Fig. 1.1 and 1.2) which transforms the mechanical vibrations of the strings into airborne vibrations. This problem and its solution are common to all string



instruments. Historically, the soundboards of keyboard instruments such as the harpsichords and pianofortes have been built in wood, a highly orthotropic material. For static reasons (see below), this wooden plate is stiffened by a series of parallel ribs glued onto the soundboard, across the grain: as a result, the orthotropy of the raw wooden plate is strongly attenuated and possibly even reversed. The detailed dynamical effects of ribbing is analysed in section 1.3.1. The soundboard is completed by two more curved bars - the bridges – which run across the soundboard, more or less along the grain (Fig. 1.1) and on which the strings are fixed by a system of two pins.

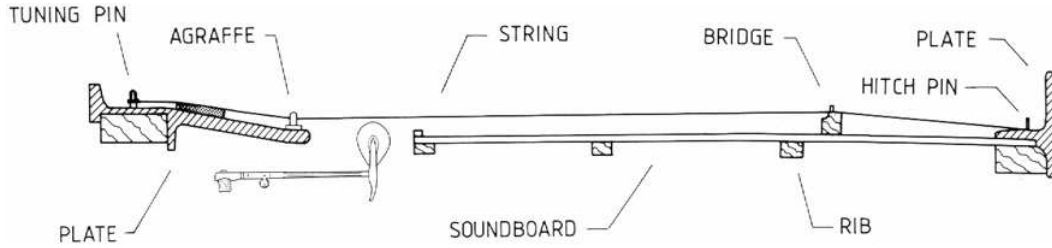


FIG. 1.1 – Main components of a grand piano (schematic view, Askenfelt [4])

On a concert grand, the strings of the 68 upper keys ( $F_2$ – $C_8$ ) are attached to the treble bridge whereas strings associated with the 20 bass keys ( $A_0$ – $E_2$ ) are attached to the bass bridge. The bridges are made of hardwood (typically maple or beech, of density  $\approx 600$ - $800 \text{ kg m}^{-3}$ ) in order to withstand the mechanical stress transmitted by the bridge pins. The treble bridge is usually 3 to 4 cm high and 2.5 to 3.5 cm wide. With a length of about 2 m, the mass of a concert grand treble bridge is around 2 kg [35], that is approximately 15-20% of the total soundboard mass ( $\approx 10$ -13 kg). The bass bridge is about 2-3 cm higher than the treble one so that the bass strings can be strung over the lower mid-range ones (see Fig. 1.6). For given soundboard dimensions, this *cross-stringing* arrangement maximises the length of the bass strings (longer strings are preferred because, among other reasons, their eigenfrequencies are more harmonic) and shifts at the same time the soundboard driving point away from the stiff edge of the board.

It is possible to list criteria that matter in piano sound: loudness, duration, a "certain" homogeneity between spectrum components of a given note, harmonicity, homogeneity between notes. . . Some of them are contradictory: since energy is given at once to the string, loudness requires a high vibroacoustical coupling while a long decay requires that little energy is transmitted from the string to the soundboard and to the external field. Quality criteria are very difficult to define. Psychoacoustical knowledge about what matters in piano sound and to which extent is still in an infant stage. Altogether, it is preferable not to talk about "optimisation" of the piano sound since what should be optimised is not always clear. Instead, this section seeks to recall or to precise certain relationships between mechanical properties and dynamical characteristics.

In addition to its dynamical role, the soundboard is also submitted to a static force. The bridges are made higher than the string termination at the agraffe and hitch pin (see Fig. 1.1) so that the strings pass over the bridge with a certain angle. Therefore, each string exerts a static force normal to the soundboard which prevents risks of loosing contact with the bridge when vibrating. This component is empirically set to about 0.5-3% of the string tension [35]; the total

resulting force or *down bearing*, is of the order of 4-6 kN for a concert grand piano [6].

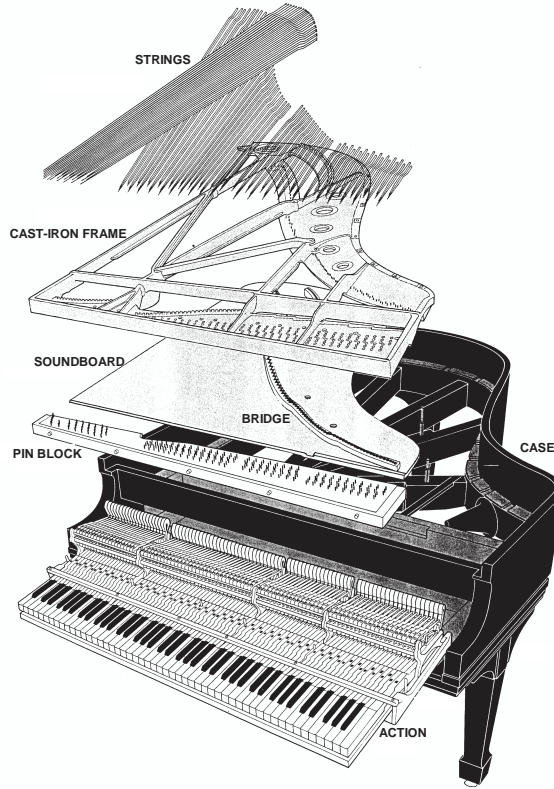


FIG. 1.2 – Analytic view of a baby grand piano, after Blackham [17].

In order to withstand downbearing, the soundboard, including ribs and bridges, is given the form of a shell, or *crown*, with a radius of curvature of 15-50 m [35], depending on the manufacturer and the assembling method. Once the soundboard is inserted in the instrument and the strings are brought up to tension, downbearing reduces the height of the crown and the soundboard appears more or less flat. Mechanically, the final position of the soundboard results from the equilibrium between internal constraints and downbearing<sup>1</sup>. In practice, the change in crown height rarely exceeds the thickness of the soundboard. It is well known among piano manufacturers that the amount of downbearing and the value of the curvature influence the tone quality and the sound level. Conklin [35] states that the height of the crown affects directly the balance between bass and treble tones and that the low-frequency output is generally maximised when the amount of bearing is sufficient to make the soundboard approximately flat.

## 1.2 Material considerations

### 1.2.1 The radiation ratio and the Ashby diagram

Three material properties – Young’s modulus  $E$ , density  $\rho$ , and loss factor  $\eta$  – appear to play a crucial role in the radiation of a plane structure. Various criterion combining them have been

---

<sup>1</sup>It happens with time that the downward bridge force permanently distorts the soundboard: the internal constraints and the down bearing reduce to zero or may even be inverted, all situations considered as highly undesirable.

proposed in the literature to characterise and select the best material for musical instruments (see Bremaud [24] for an exhaustive review). The more relevant one for the soundboard is [129] the radiation ratio  $R = c/\rho = \sqrt{E/\rho^3}$  in  $\text{m}^4 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-1}$  where  $c = \sqrt{E/\rho}$ , also called *Schelleng's vibration parameter* [106] or [129], or sometimes simply *acoustic constant* [100].

$R$  appears in the expression of the acoustical damping of the first modes (below coincidence) of a baffled plate radiating from both sides, after Wallace [120] or Lieber [83]. For the lowest resonance frequency of a rectangular ( $a \times b$ ) plate:

$$\eta_{\text{rad,fond}} \approx A \frac{\rho_a}{c_a} R \quad (1.1)$$

where  $\rho_a$  is the density of air,  $c_a$  is the speed of sound in air and  $A = \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) \frac{32}{\sqrt{3}\pi^3}$  is a constant. The radiation ratio  $R$  appears as a measure of the acoustical power produced by a driven plate [58].

Another point of view is presented by Chaigne and Kergomard [31], inspired by Barlow's work [10]: maximising the acoustical radiation by the soundboard can be achieved by decreasing the coincidence frequency while keeping at the same time the real part of the admittance at the bridge as high as possible<sup>2</sup>. Using Skudrzyk's *mean-value theorem*[113], the real part of the admittance is known to be (asymptotically) the mean value of the driving-point admittance.

Thus, the mean value of the bridge mobility is  $Y_{\text{mean}} = \frac{1}{8h^2} \sqrt{\frac{12(1-\nu^2)}{E\rho}}$  [113] and the coincidence frequency of a thin plate is  $f_c = \frac{c_a^2}{2\pi h} \sqrt{\frac{12\rho(1-\nu^2)}{E}}$ . If the thickness of the plate  $h$  is fixed and chosen a priori, the so-called index of merit  $\frac{Y_{\text{mean}}}{f_c^2}$  eliminating  $h$  comes naturally as:

$$\frac{Y_{\text{mean}}}{f_c^2} = \frac{\pi^2}{2c_a^2 \sqrt{12(1-\nu^2)}} R \quad (1.2)$$

The Schelleng's parameter or radiation ratio  $R$  appears as the parameter to maximise *for a given plate thickness*. This condition is clearly a severe restriction in the reasoning upon maximisation.

Barlow gives another criterion which maximises the amplitude of the soundboard mobility at resonance. According to Langley [77] the upper envelope of the admittance magnitude is:

$$Y_{\text{peak}}(f) = Y_{\text{mean}} \coth(\pi\mu(f)/2) \quad (1.3)$$

where  $\mu = n(f)\eta f$  is the modal overlap and  $n$  is the modal density (as formally defined in chapter 3, section 1.2). For a thin plate, the asymptotic value of  $n$  is  $n_\infty = \frac{S}{2h} \sqrt{\frac{12\rho(1-\nu^2)}{E}}$ . For small  $\mu$

---

<sup>2</sup>The energy transfer from the strings to the board is characterised by the real part of the bridge mobility.

(well-separated peaks),  $\coth(\pi\mu(f)/2) \approx 2/(\pi n(f) \eta f)$  so that:

$$Y_{\text{peak}} \approx Y_{\text{mean}} Q \frac{2}{\pi n_{\infty} f} \quad (1.4)$$

The value of the modal density of the soundboard is supposed to be characteristic of each particular instrument [121],[10]. Using Eq. 1.2 and substituting  $h$  in terms of  $n$  yields:

$$Y_{\text{peak}} \approx \frac{1}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \frac{n(f)}{\pi f S^2} RQ \quad (1.5)$$

The surface  $S$  of the soundboard is also to be characteristic of the instrument. The parameter to maximise is the so-called acoustic conversion efficiency [96]  $E_{\text{ac}} = R/\eta = RQ$  that takes now into account the internal damping (internal friction) of the material<sup>3</sup>.

The loudness index  $L$  proposed by Haines [58] is proportional to the square of the acoustic conversion efficiency :  $L = (R/\delta_{\log})^2 = (E_{\text{ac}}/\pi)^2$ .

The expressions presented in this paragraph are established for an isotropic plate. The same reasoning can be applied to an orthotropic material (e.g. [31]). Similar expressions for the Shellen's parameter and the acoustical conversion efficiency are obtained simply by replacing the Young's modulus  $E$  by  $\sqrt{E_L E_R}$  and the quality factor  $Q$  by  $\sqrt{Q_L Q_R}$ , where  $E_L$  and  $E_R$  (respectively,  $Q_L$  and  $Q_R$ ) are the Young's moduli (respectively, quality factors) in the longitudinal and radial directions of a *quarter-sawn* plate (Fig. 1.4).

All this explains why materials with a high  $E/\rho^3$  ratio and a low internal damping  $\eta$  are favoured (see the Ashby diagram, figure 1.3). Balsa would be the best choice [10] but this material is not strong enough to withstand the downbearing that acts on the bridges: spruce ( $\sqrt{E_L E_R} \approx 3.4$  GPa) is preferred. In order to accommodate the mechanical stress near the metal bridgepins which form the string-terminating points, bridges are in maple ( $\sqrt{E_L E_R} \approx 4.6$  GPa) or beech ( $\sqrt{E_L E_R} \approx 5.5$  GPa) [35]. More complete considerations upon the choice of wood are given in the next section.

### 1.2.2 Wood species - Spruce

Two species of spruce are particularly appreciated by the piano makers and systematically selected for the best soundboards ([97], [25], [35] or [6]): *Picea abies* or *Picea excelsa* (commonly known as Norway spruce or European spruce) from European origin (particularly the Austrian and Bavarian Alps, and the Carpathians), and *Picea sitchensis* (Sitka spruce) from the west coast of North America (south Alaska – north California)<sup>4</sup>. This second specie is recommended these days by the most important piano makers in the US but also in Japan and Europe [25] for the best

---

<sup>3</sup>The relations between the damping parameters are :  $\lambda(= \delta_{\log}) = \eta\pi = \pi/Q = \pi \tan \delta = \alpha/f$  where  $\lambda$  is the logarithmic decrement,  $\delta$  is the loss angle and  $\alpha$  the damping factor also called decay constant in  $\text{s}^{-1}$ .

<sup>4</sup>*Abies alba* (resonance fir) [25], and *Picea rubens* (Red spruce) [35] are also often used.

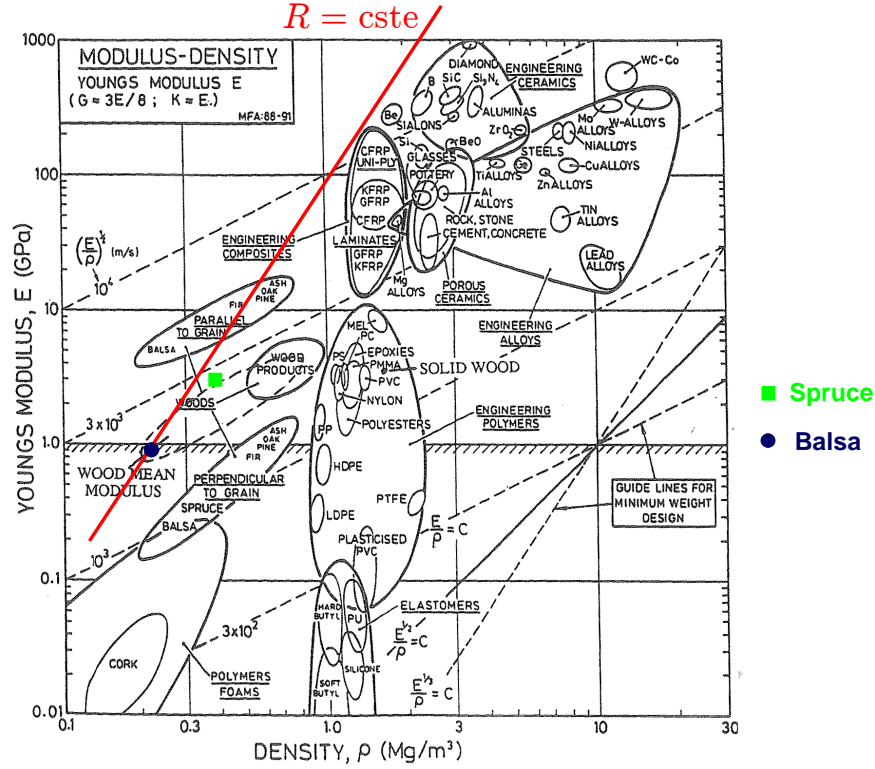


FIG. 1.3 – Ashby diagram [3] : map showing elastic modulus and density for the main classes of engineering materials. The balsa and spruce mean modulus are added.

instruments. According to Haines [58], its huge tree (trunk diameter up to 5 m, much larger than that of European spruce, limited to 1.5 m) is ideal for large instruments. The quasi-systematic use of Sitka spruce by US manufacturers (e.g. Boston or Steinway and Sons) was evidently also motivated by geographical reasons.

Spruce from the Carpathians (called Rumanian spruce, and commercially known as Rumanian pine) is considered to be one of the best woods for the production of concert grand pianos because of its acoustical properties, its general appearance, and its attractive light yellow color [25]. Indeed, European manufacturers (e.g. Bösendorfer or Schimmel) prefer Eastern European spruce. An interesting explanation for the specificity of Rumanian spruce is given by Lieber [83]: it appears that the conditions of growth – very slow at the altitude of 800 to 1200 meters in relatively unfavourable locations – result in relatively low density and a constancy throughout the trunk cross section. More generally, Askenfelt [6] remarks that wood from slow-growing regions is generally preferred. These considerations meet luthier's primary requirement that the growth ring pattern be regular [68]. This means constancy in annual ring widths and in the proportion of early-wood (also called spring wood, with a density around  $\rho \approx 280 \text{ kg m}^{-3}$ ) to late-wood (also called summer wood, darker in colour than spring wood, and denser:  $\rho \approx 900 \text{ kg m}^{-3}$ ). For resonant spruce wood, the proportion of late-wood in one annual ring hardly exceeds 25% [25], and the overall density is around  $\rho \approx 390\text{--}460 \text{ kg m}^{-3}$ . In fact, larger values for this proportion are not acceptable since increasing the late-wood proportion increases the overall density and the internal friction in

the R direction (the loss factor is  $\tan \delta_R$ , according to Holz [63]). These two parameters need to be maintained as small as possible for acoustical considerations (see previous paragraph). Wood for which the width of annual rings exceed 3 mm is systematically considered by piano makers as unsuitable ([54], or [62]). Thinner annual rings (revealing a slow growth, as in Rumanian spruce for example) are preferred: between 1 and 2 mm.

Compared to standard spruce wood, resonant spruce wood have a significantly lower density with a significantly higher radiation ratio (see for example Fukada [54] or Rajcan [100]) and a lower internal damping. A summary of typical values for mechanical properties of Norway and Sitka spruce samples selected for use in high quality musical instruments (piano or violin family instruments) is given in table 1.1, after Haines [58] and Hearmon [60]. Density, velocity of sound, Young's and shear moduli, Poisson's ratio, radiation ratio, loss factor and loudness index are given for the longitudinal L, radial R, and tangential T directions when available (see Fig. 1.4). Haines' results correspond to means on 8 samples of Norway spruce and 9 samples of Sitka spruce. Standard deviations are added. Note that the loss factors of Norway spruce are lower and the loudness index is significantly higher than for Sitka spruce.

$\rho$	$c_L$	$c_R$	$E_L$	$E_R$	$E_T$	$G_{LT}$	$G_{RT}$	$G_{LR}$	$\nu_{LR}$	$\nu_{LT}$	$\nu_{RT}$	$R_L$	$R_R$	$R$	$\eta_L$	$\eta_R$	$L$
<i>Picea excelsa</i> (Norway spruce) - Mean on 8 samples and (standard deviations) - Haines [58]																	
460 (51)	5600 (260)	1300 (200)	15.0 (2.1)	0.76 (0.26)	— —	0.84 (0.22)	0.054 (0.010)	— —	— —	— —	— —	12 (1)	2.8 (0.4)	5.8 —	6.7 (1.0)	20.4 (3.2)	27.0 (11.0)
<i>Picea sitchensis</i> (Sitka spruce) - Mean on 9 samples and (standard deviations) - Haines [58]																	
460 (50)	5300 (280)	1400 (210)	13.0 (2.5)	0.89 (0.24)	— —	0.99 (0.22)	0.072 (0.035)	— —	— —	— —	— —	12 (1)	3.0 (0.6)	6.0 —	8.3 (1.0)	21.0 (2.9)	22.0 (8.8)
<i>Picea excelsa</i> (Norway spruce) - Hearmon [60]																	
440	—	—	15.9	0.69	0.39	0.77	0.036	0.62	0.44	0.38	0.47	—	—	6.2	—	—	—
<i>Picea sitchensis</i> (Sitka spruce) - Hearmon [60]																	
390	—	—	11.6	0.90	0.50	0.72	0.039	0.75	0.37	0.47	0.43	—	—	7.4	—	—	—

TAB. 1.1 – Typical values for the mechanical properties of wood species selected for soundboards, after Haines [58] and Hearmon [60]. The density  $\rho$  is in  $\text{kg m}^{-3}$ , the velocities of sound  $c_R$  and  $c_L$  are in  $\text{m s}^{-1}$ , the Young's moduli  $E_L, E_R, E_T$  and the shear moduli  $G_{LT}, G_{RT}, G_{LR}$  in GPa, the Schelleng's parameters  $R_L, R_R$ , and  $R = \sqrt{R_L R_R}$  are in  $\text{m}^4 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-1}$ , the loss factors  $\eta_L, \eta_R$  are in ‰ and the loudness parameter  $L$  is in  $\text{m}^8 \text{kg}^{-2} \text{s}^{-2}$ . Loss factors were measured at low frequency (less than 1 kHz).



### 1.3 The structure

Piano soundboards are assembled from quarter-sawn strips, limited in width by the spruce trunk radius (see Fig. 1.4).

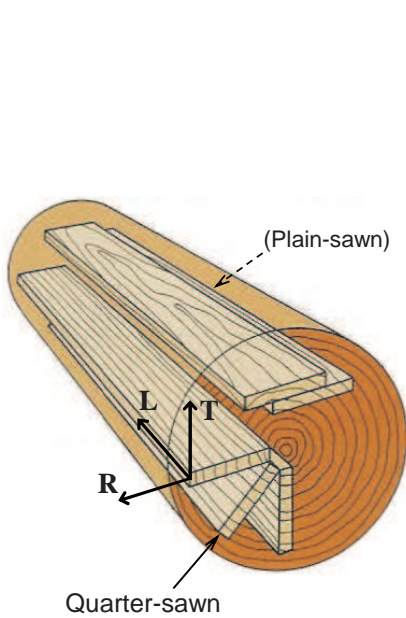


FIG. 1.4 – Quarter-sawn, and plain-sawn wood strips.

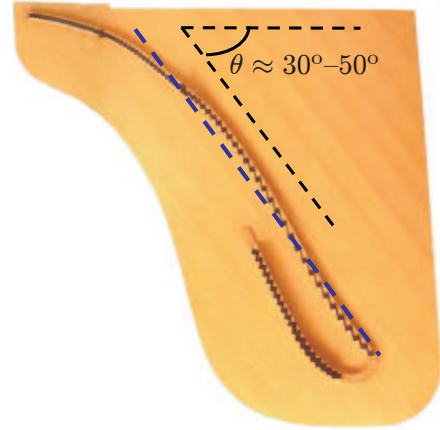


FIG. 1.5 – Typical baby grand piano's soundboard with bridges. According to Conklin, *in grand pianos the grain normally forms an angle of  $30^\circ$ - $50^\circ$  with the small side (keyboard side) of the case* [35]. The wood grain direction is almost parallel to the average direction of the long bridge.

Thus, several strips are needed to make the board as wide as required. With a width of 5 to 15 cm and a thickness of around 13 mm [35], strips are glued together edge-to-edge. Strips up to 3 m are needed for concert grand piano. For perfectly quarter-sawn material, the grain angle (angle of the annual rings relative to the surface) would be  $90^\circ$  but rather large deviations from ideal conditions are accepted in production (down to  $45^\circ$  after Conklin). The panel is then given its geometrical shape and thickness (between 6 and 10 mm). Once the soundboard is mounted in the instrument, the wood grain runs diagonally with respect to the case. With this orientation, the strips direction is essentially parallel to the average direction of the long (treble) bridge (see Fig. 1.5 or Fig. 1.6 where the grain direction and the bridges are clearly visible). Thus, the ribs (see after) run almost perpendicular to the treble bridge. According to Askenfelt, this represents *the optimum direction for supporting the curvature of the soundboard*, [6].

Bucur [25] gives a very interesting indication which is surprisingly omitted or ignored in the literature. Strips with different ring width (from about 1 to 2 mm) are recommended in piano soundboard: *wider-ringed strips under the bass bridge and closer-ringed strips under the treble one, with gradual change in adjacent strips*. This remark needs to be confirmed by piano makers since the geometry of the soundboard and bridges often does not enable a true separation between strips for bass/treble bridges (see Fig. 1.6 for example). Nevertheless if such gradual change would exist, it would have beneficial acoustical consequences. A decrease of spruce strips ring width (relative increase of stiffness) towards the treble region of the piano is beneficial for the acoustics



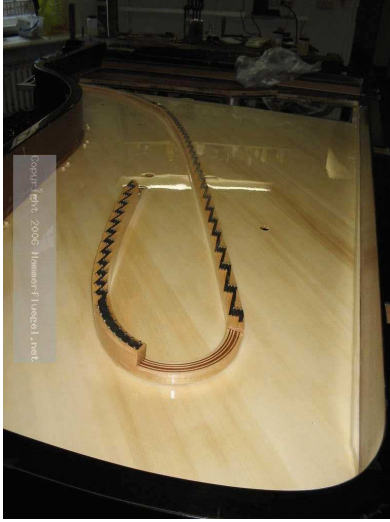


FIG. 1.6 – Steinway concert grand piano's soundboard with bridges, mounted on the rim.

[HTTP://HAMMERFLUEGEL.NET/](http://HAMMERFLUEGEL.NET/)



FIG. 1.7 – Fazioli baby grand piano's soundboard, with bridges and ribs. [HTTP://WWW.FAZIOLI.COM/](http://WWW.FAZIOLI.COM/)

of the instrument as long as it results in an increase of the impedance seen by treble's strings. This (relative) increase of impedance is desirable for the upper range of the keyboard where slower decay rates are sought by piano makers<sup>5</sup>.

### 1.3.1 Ribs

As seen before, spruce is a highly anisotropic material:  $E_R/E_L \approx 1/10$  to  $1/20$  (where L and R are respectively grain and cross-grain directions). Therefore, in order to compensate this lack of cross-grain stiffness, ribs (also made of softwood [6]: spruce or sugar pine bars sawn in the direction of the grain) are glued onto the bottom of the soundboard for grand piano (the back for upright piano), oriented nearly  $90^\circ$  to the direction of the grain of the board (see Fig. 1.7). Typical grand piano soundboard has about 12 to 17 ribs spaced between 10 to 18 cm apart. Their cross sections dimensions are about 25 mm in width with varying height from 15 to 25 mm (thinner and closer toward the treble edge). An additional function of ribs is to prevent cracks induced by humidity and temperature variations in the the main board [35]. After ribbing, the bending stiffness ratio on an upright piano (without bridges) becomes 2/1 according to measurements done by Lieber [83]. Several authors and piano manufacturers report that after bridging and in playing situations, the bending stiffness ratio is 1 : the board appears isotropic in low frequency (e.g. [35], [44] or [13]).

It turns out that, according to Conklin [35], as long as the cross-grain stiffness of the ribbed board comes predominantly from the ribs (see homogenisation calculus), *the characteristics of a piano soundboard are relatively independent of variations in the cross-grain properties of the strips*

<sup>5</sup>According to Askenfelt, *contemporary modifications of the piano design seem to strive for these slower decay rates* [5]. Stiffening and by the way decreasing the soundboard area (by decreasing spacing of two adjacent ribs for example, see after) in the treble region are part of the solution

*themselves*. Thus, the large standard-deviations reported in table 1.1 for cross-grain Young's moduli ( $\approx 34\%$  for  $E_R$  of Norway spruce compared to  $\approx 14\%$  for  $E_L$ ) have no effect in practice for piano making, contrary to violin making for example where no cross-grain ribbing exists.

### 1.3.2 Tapering

According to Bilhuber and Johnson [15]: *anything that could be done to encourage the diaphragmatic response of the board would result in better tone*. In fact, soundboards are often made thinner at the periphery (6 mm) than at the centre (9 mm) [6]. This *diaphragmatic* soundboard patented by Bilhuber [16] has been used by Steinway and Sons since the 1930's and is still widespread. However, the dynamical change is different at low and high frequencies and is also different for bass and treble notes. Decreasing the stiffness increases mobility: this is surely beneficial at (very) low frequencies (below the first resonances of the soundboard). However, giving too much flexibility to the treble area of the board makes difficult to have good sustain in the upper range of the keyboard, where strings "see" a softer board. Hence, some piano makers recommend *partial* or *bass* tapering: along the lower half of the board only (e.g. the Fandrich Piano Company [52]).

### 1.3.3 Bridges

Let's conclude this part with an important remark of Conklin [35] concerning the effect of bridges on the tone production. *The design of the soundboard bridges affects profoundly the tone of a piano. The bridges and soundboard together determine the load presented to the strings. In coupling the strings to the soundboard, the bridges functions as impedance transformers presenting a higher impedance to the strings than would exist in the case of direct coupling. [...] If the strings were terminated directly on the soundboard, the result would be a louder-than-normal but relatively unpleasant tone of comparatively short duration. By adjusting the design of the bridges, the designer of a piano can change the loudness, the duration, and the quality of the tone, within a certain range, in order to suit the intended use of the instrument.*

## 2 Bibliographical study on the vibrations and sound radiation of the soundboard

### 2.1 Low-frequency vibrations

The studies of the low-frequency behaviour of piano soundboards and their main results (estimated first resonance frequencies and loss factors) are schematically presented in Table 1.2 and Table 1.3. In the first table, for each study, the dimensions<sup>6</sup> and the thickness  $h$  (in millimetres) at

---

<sup>6</sup>For the concert grands and baby pianos, the length  $l_{\max}$  indicated is the *piano length* in m. For the uprights pianos, the surface  $l_x \times l_y$  in  $\text{m}^2$  corresponds to the surface of the rectangular soundboard.

the centre of the board are specified. The second table compares the results of the studies where loss factors have been estimated.

We add in the tables the results of our measurements done on an upright piano under playing condition and put in a pseudo-anechoic room (see chapter 3). The soundboard is excited with an impact hammer (Kistler – Type 9722A) in 120 points and the acceleration measured with five accelerometers kept fixed in five points of the board. Each response is analysed with the technique described in chapter 2 and published [47]. The modal frequencies, damping factors, amplitudes and phases are extracted for each of the 120×5 responses. The modal frequencies and damping factors reported in the tables are the weighted means of all the estimated values. Weights are the estimations of the amplitude at each point : this gives less importance to the less precise estimations in the nodal regions.

### 2.1.1 Modal frequencies (Wogram, Nakamura, Suzuki, Kindel, Conklin, Dérogis, Berthaut, Moore, Ege)

Due to differences in the measuring conditions (mounted on the rim or not, with or without the bridges, the metal frame, or the strings, tuned or untuned, ...), and of the pianos themselves, a strict comparison between the results of these studies is not possible. However, some global trends on the first resonant frequencies of the board can be given:

- Rim - Fixing on the rim raises considerably the resonance frequencies (compare results of Berthaut *et al.*, having free boundary conditions, with all others): this is to be expected since stress in edges stiffen the plate. According to Nakamura [93], the best approximation for boundary conditions of a mounted soundboard are clamped conditions (except for the very first modes for which the boundary conditions is near the support).
- Bridges – Boards with the bridges have only slightly higher resonance frequencies than without (compare Conklin II to Conklin I or to Kindel).
- Downbearing – Boards with tuned strings have higher resonance frequencies than boards without or with slack strings (compare Wogram with Conklin and Kindel for concert grand; or compare Moore II, Derogis, and Ege to Nakamura and Moore I for upright pianos): downbearing stiffens the board.
- Board size and low frequency radiation – In his review on the acoustics of piano [116], Suzuki notices that the first four modal frequencies estimated on a concert grand by Kindel *et al.* are almost the same as those he measured on a baby grand, 1.5 times smaller in dimensions. This remark does not apply to upright pianos soundboards, the first resonance frequencies of which being significantly more disperse, and also generally higher than those of grand pianos. At low frequencies, the loss in radiation efficiency is generally due to the acoustical short-circuit (see Sec.2.4). However, the (small) radiation capacity is related to the first lower modes of the board; this might explain the particularly poor radiation capacity of the

	Measurement conditions	$l_{\max}$ or $l_x \times l_y$	$h$	Modal frequencies $f_k$ [Hz]								$\Delta_f$ [Hz]	
Concert grand pianos													
Kindel <i>et al.</i> [74]	board mounted on the rim, without bridges, string plate and strings – Baldwin piano model SD-10)	2.74	9	49.2	62.5	90.6	112.5						21.1
Conklin I [35]	board mounted on the rim, without bridges, string plate and strings	2.74	9	49	66.7	89.4	112.8						21.3
Conklin II [35]	same mounted board with bridges	2.74	9	48	70	100	131						27.7
Wogram [4]	piano in playing situation (strings muted)	2.90	–	62	90	105	127	187	222	245	[325]		30.5
Baby grand pianos													
Berthaut <i>et al.</i> [14]	board unmounted (boundary conditions considered as free), without bridges, string plate and strings – Pleyel piano model P190	1.90	7.9	11.8	12.7	13.4	18	24.9	36.7	41.7	52.4		5.8
Suzuki [115]	board mounted on the rim, with bridges, without string plate and strings – Steinway piano model L	1.83	8	49.7	76.5	85.3	116.1	135.6	161.1				22.3
Upright pianos													
Nakamura [93]	board mounted on the rim, with bridges, without string plate and strings	$1.4 \times 1.03$	8.5	55	109	140	169	193	241	258	[366]		33.8
Moore I [92]	board mounted on the rim, with bridges, string plate and strings completely slack	$1.40 \times 0.63$	6.9	80	110	170							46.0
Moore II [92]	same piano in playing situation (strings muted)	$1.40 \times 0.63$	6.9	112	129	204							45.0
Dérogis [44]	piano in playing situation (strings muted)	$1.37 \times 0.89$	–	93	122	171	184	214	232	251	278		26.4
Ege	piano in playing situation (strings muted) – Atlas piano	$1.39 \times 0.91$	8	114	134	159	177	205	253	274	295		25.8

TAB. 1.2 – Low frequency behaviour of piano soundboards: first modal frequencies  $f_k$  (in Hz). The board dimensions are in m, the thickness is in mm. The average modal spacing is given by  $\Delta f = \text{mean}(f_{k+1} - f_k)$  in Hz. One or more resonances seem to have been missed in Wogram’s and Nakamura’s studies. Hence, values in brackets have not been considered in the corresponding modal spacing calculus.

Baby grand pianos				Upright pianos			
Berthaut [14]		Suzuki [115]		Dérogis [44]		Ege	
$f_k$ [Hz]	$\eta_k$ %	$f_k$ [Hz]	$\eta_k$ %	$f_k$ [Hz]	$\eta_k$ %	$f_k$ [Hz]	$\eta_k$ %
11.8	1.2	49.7	6.4	93	8.2	114.1	4.5
12.7	1.2	76.5	$\approx 2-3$	122	7.3	134.1	5.6
13.4	1.2	85.3	$\approx 2-3$	171	4.8	159.0	5.2
18	1.2	116.1	$\approx 2-3$	184	5.5	177.4	1.2
24.9	2.9	135.6	$\approx 2-3$	214	4.9	205.2	3.6
36.7	1.3	161.1	$\approx 2-3$	232	5.5	252.9	1.8
41.7	1.6			251	3.8	274.2	2.5
52.4	1.3			278	4.4	294.8	2.2
55.2	1.6			296	3.9	303.3	1.7
56.9	1.3			309	4.4	321.8	2.3
63.3	1.2			328	2.7	339.9	3.6
66.9	2.4			352	3.4	370.1	2.9
83.8	2.5			381	3.3	382.0	3.1
86.8	1.2			401	3.3	400.7	2.8
95.1	1.9			428	2.9	420.0	2.5
100	1.4			462	3.2	454.9	1.8
113	1.6			489	2.9	468.8	2.2
124	1.6					489.1	2.1
129	1.5					515.4	1.5
135	2.6					531.6	2.2
$\Delta f$ [Hz]	$\bar{\eta}$ %	$\Delta f$ [Hz]	$\bar{\eta}$ %	$\Delta f$ [Hz]	$\bar{\eta}$ %	$\Delta f$ [Hz]	$\bar{\eta}$ %
6.5	1.6	22.3	$\approx 2-3$	24.8	4.3	22.0	2.7

TAB. 1.3 – Low frequency behaviour of piano soundboards: modal frequencies  $f_k$  (in Hz) and modal loss factors  $\eta_k$  (in %). The average modal spacing is given by  $\Delta f = \text{mean}(f_{k+1} - f_k)$  in Hz and the average modal loss factor  $\bar{\eta} = \text{mean}(\eta_k)$  in %. First column : only the first 20 modes (on a total of 26) estimated by Berthaut *et al.* are reported here.

upright pianos whose modes are *above* the first partials of bass strings, compared with grand pianos (even the smaller ones) which have lower soundboard modal frequencies.

### 2.1.2 Modal density

A comparison of the precise resonant frequency values among different pianos is likely to be meaningless. Askenfelt [5] observes: *Piano makers do not pay the same attention to the soundboard as violin makers do, who tune the low-frequency modes of the top and back plates by adjusting the thickness graduation. The piano soundboard is tapered towards the edges and ribs are glued on the underside to achieve the crown but no tuning of mode frequencies is made, indicating that the global (average) properties are most important.* Hence, we prefer examining global indicators such as the average modal density of the board (inverse of the average modal spacing reported in the last column of Tab. 1.2).

Boundary conditions – In the low frequency region, the modal density depends on the boundary

conditions imposed by the rim. The average modal spacing  $\Delta f$  is approximately 6.5 Hz for the unmounted baby grand soundboard without strings (see Tab. 1.3, Berthaut *et al.*) and about 3 times more ( $\approx 22.3$  Hz) for the mounted board of almost same size and thickness and without strings (Suzuki). This observation confirms the difference of boundary conditions: as shown in section 1.2.3 of chapter 3, the average modal density of a free plate is much larger, in the low frequency range, than the asymptotic value. The difference is opposite for a plate with constraint edges: the average modal density is much less than its asymptotic value.

Asymptotic value of the modal density – The average modal spacing observed between 100 and 500 Hz is 22 Hz and 24.8 Hz for two different uprights pianos (see Tab. 1.3). The two values are close, even though the first frequencies are clearly different. For grand pianos, the number of resonances identified for each of the study is too small (setting aside the study of the unmounted soundboard) to compare their average spacing rigorously. However, this value lies between 20 and 30 Hz for the mounted soundboards, which is not far from the value obtained for upright pianos. More complete studies on grand pianos (similar to the one we did on an upright piano), up to  $\approx 500$  Hz are necessary to conclude precisely. It seems that this modal density is given roughly the same value for all pianos, whatever their dimensions are. We can expect the modal density to be almost constant in the whole piano family. In fact several authors directly linked this value to the timber of a given instrument [10],[31], and [121]. A way to achieve it is to modify the global thickness of the soundboard. For an orthotropic homogeneous plate the modal density is  $n(f) = \frac{S}{h} \sqrt{\frac{3\rho(1 - \nu_{LR}\nu_{RL})}{E_L E_R}}$  in modes.Hz<sup>-1</sup>. In the case of the piano, wideness and thickness go together: for the widest concert grand,  $h$  approaches 10 mm whereas for the smallest uprights, it approaches 6 mm.

Weinreich [123] derives the modal density analytically for an isotropic equivalent plate (see discussion on homogeneisation in section 1.3 of chapter 4). He obtains a value of 26 Hz for the average modal spacing of an upright piano soundboard with  $S = 1$  m,  $h = 8$  mm,  $E = 15$  GPa,  $\rho = 450$  kg m<sup>-3</sup>. Interestingly, he makes a link between this value and the semitone value around  $\mathbf{A}_4 = 440$  Hz<sup>7</sup>:  $\mathbf{A}_4$  is the lowest note for which the average modal spacing of the soundboard remains less than the semitone value. In Weinreich's words: *it is impossible to avoid appreciable note-to note fluctuations in response when the piano is played at pitches lower than that (at least as far as the fundamental is concerned).*

Influence of downbearing – We can expect the asymptotic value of the modal density not to change when downbearing is present or not: the first modal frequencies are modified by the load due to the stiffening of the plate (see previous comments) but the average modal spacing is expected to tend to the same value for higher frequencies. More experimental results would be needed to assess this hypothesis.

---

<sup>7</sup>The semitone above  $\mathbf{A}_4$  corresponds to:  $440 \cdot 2^{1/12} \simeq 466.2$  Hz



### 2.1.3 Modal damping (Suzuki, Dérogis, Berthaut, Ege)

The modal loss factors identified by Berthaut *et al.* on a free board are closed to the internal friction of the spruce  $\approx 1\text{--}2\%$  (see table 1.1) and lie between  $2\text{--}2.6\%$  for the last modes he identified at  $\approx 130\text{--}200$  Hz (values not reported in the table 1.3). What is quite pleasant and reassuring is that on the contrary of what he says [13], his measurements are in really good agreement with the one of Suzuki ( $\bar{\eta}$  between 2 and 3%), and by the way with ours ( $\bar{\eta} \approx 2.7\%$ ). In fact, he confused the loss factor  $\eta$  with the modal damping ratio  $\xi = \eta/2$  he gave in his article. Thus he omitted a factor of 2 when comparing his damping ratios  $\xi$  with Suzuki’s loss factors  $\eta$ . Nevertheless, the explanation he gives of these possible small discrepancies for the first modal loss factors – *Suzuki soundboard’s was mounted on the rim on the piano, so this rim could have dissipated energy, increasing the loss factor* – is still right. Note that also Lieber [83] measured similar loss factors between 2 to 4% for the first resonances of an upright piano (unmounted on the rim, and apparently with bridges, strings plate and strings muted). Concerning the relatively high values of the loss factor measured by Dérogis ( $\bar{\eta} \approx 4.4\%$ ), it can still be explained by the rim that could have dissipated energy, and this particularly for the first modes. In fact, the loss factors of his last estimations, less influenced by the rim, are smaller: around 3%.

### 2.1.4 Modal shapes

The modal shapes of the first three modes of a concert grand piano soundboard mounted in its wooden rim but without bridges (and strings and frame) studied by Conklin [35] are visualised by the Chladni method (see figure 1.8). In the lowest (1,1)-mode, the entire soundboard moves in phase like a diaphragm. The next modes are the (2,1)- and (3,1)-modes.

The same three lowest modes are shown for two upright pianos – the one studied by Moore *et al.* [92] (see Figure 1.9 and first line of figure 1.10) and the one that we studied (second line of figure 1.10). Moore *et al.* used an electronic speckle pattern interferometry method to visualise the modal shapes. The vibrations are driven acoustically from a speaker placed approximately 2 m away. Our results are obtained by the high-resolution modal analysis technique. The modal shapes given in the second line of figure 1.10 are the weighted sum of the five corresponding shapes calculated for each of the five accelerometers.

For the two upright pianos in playing situation and despite of differences in thickness, size of the board, and the presence of two dead zones<sup>8</sup> in the upper left and the lower right corners of one of the soundboards, the modal shapes are matching well (Figure 1.10)<sup>9</sup>, with very close modal frequencies (see table 1.2). In particular, the right side of the soundboards seems to vibrate more than the left side for these three first modes (see for example the (2,1)-mode in Moore *et al.* study and our (3,1)-mode): the shapes are particularly asymmetric. A precise comparison of the visualisations obtained by Moore *et al.* (without and with string tension) reveals that asymmetry is mainly due to the string load. In particular, the antinode of the lowest mode is shifted from the

<sup>8</sup>*Mouchoirs en français.*

<sup>9</sup>Note that in our study the region of the dead zones are essentially nodal for these modes.



FIG. 1.8 – Chladni patterns of the three lowest modes of the soundboard of a concert grand installed in its wooden rim, without bridges, string frame and strings, after Conklin [35]. (a) (1,1)-mode,  $f \approx 49$  Hz. (b) (2,1)-mode,  $f \approx 66.7$  Hz. (c) (3,1)-mode,  $f \approx 89.4$  Hz.

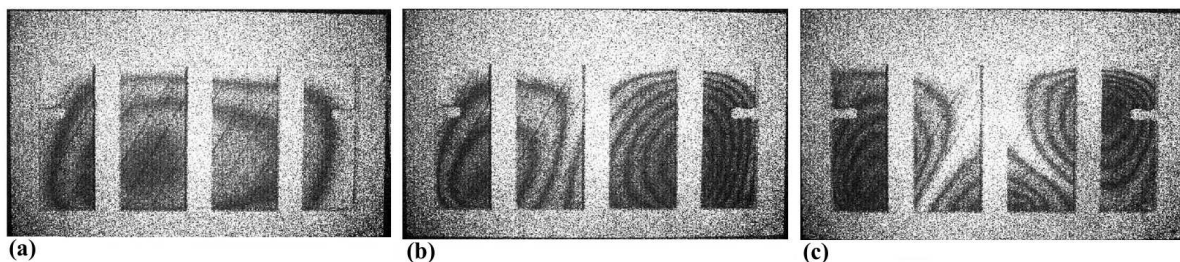


FIG. 1.9 – Modal shapes of the three lowest modes of the soundboard of an upright piano mounted on its rim with no string tension (strings slacked), after Moore and Zietlow [92]. Visualisation by electronic speckle interferometry. (a): (1,1)-mode,  $f \approx 80$  Hz. (b): (2,1)-mode,  $f \approx 110$  Hz. (c): (3,1)-mode,  $f \approx 170$  Hz.

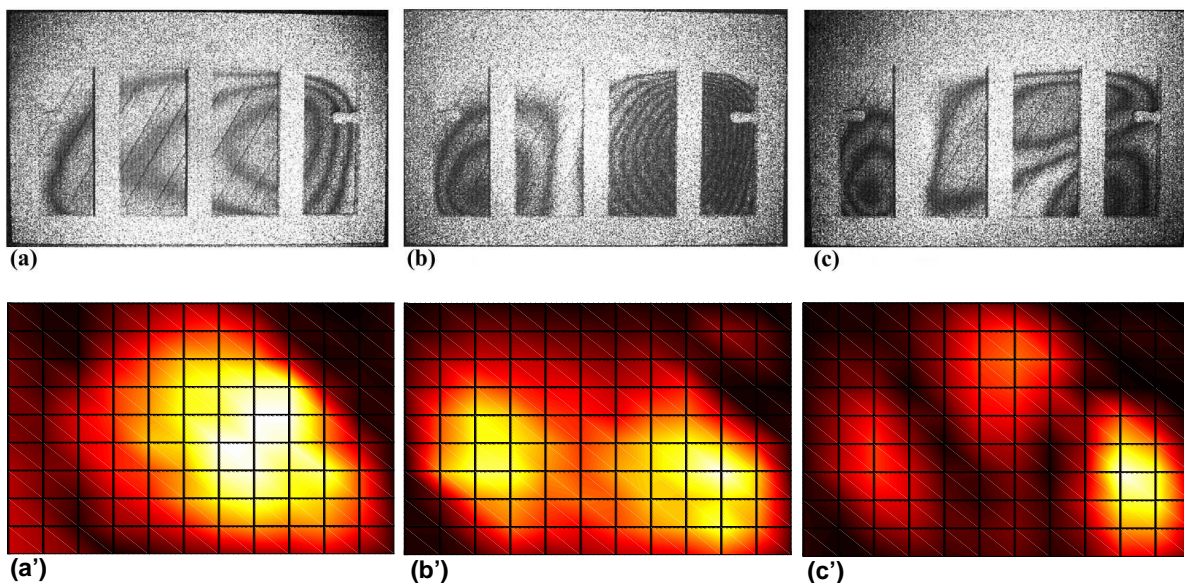


FIG. 1.10 – Modal shapes of the same first modes of two upright pianos in playing situations (tuned strings).

First line: board studied by Moore *et al.* (compare with previous figure).

(a): (1,1)-mode,  $f \approx 112$  Hz. (b): (2,1)-mode,  $f \approx 129$  Hz. (c): (3,1)-mode,  $f \approx 204$  Hz.

Second line: modal shapes obtained by an high-resolution modal analysis technique, on our upright piano.

(a'): (1,1)-mode,  $f \approx 114$  Hz. (b'): (2,1)-mode,  $f \approx 134$  Hz. (c'): (3,1)-mode,  $f \approx 205$  Hz.



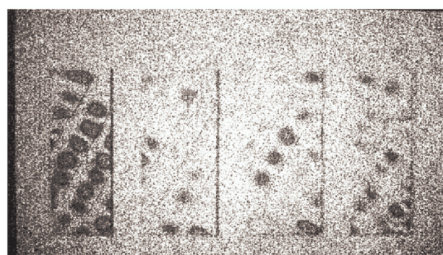
right Fig. 1.10(a) to the bottom left (toward the bass bridge) when the string tension is removed Fig. 1.9(a). Also, the (3,1)-mode shape becomes symmetric with respect to the middle vertical axis of the board. The influence on the first modal shapes of the stiffness added by the bass bridge is obvious. On a piano, the load of the strings is distributed almost uniformly along the length of the two bridges but the long and thick bass strings create on the small bass bridge a particularly large local downbearing force. Hence, when the board is loaded, the bottom middle left side of the plate vibrates much less than without load for these first modes. An interesting consequence in terms of overall tonal quality of the sound is given by Moore: for the second mode in particular, *the asymmetry reduces the efficiency of acoustic short-circuiting between the two antinodes. This causes the lower frequencies to be radiated more efficiently than would be possible with a completely symmetric mode shape.*

## 2.2 Mid- and high-frequency vibrations

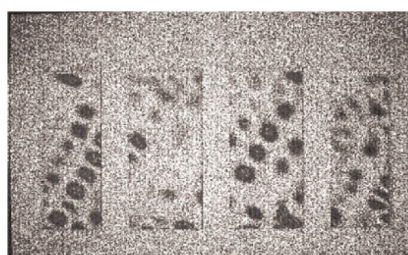
### 2.2.1 Vibrations between ribs

In practice, a rapid fall-off is seen on the bridge impedance curves [6], above approximately 2–3 kHz (see figures 1.12–1.14). Quoting Giordano [55]: *modes with shorter wavelength "fit between" the ribs, and therefore experience a softer board than do the long wavelength vibrations.* For ribs of conventional size and spacing, this first *cut-off* frequency – when  $\lambda_L/2$  approaches ribs spacing  $p$  – occurs around  $f \approx 1.2$  kHz. Around 4.8 kHz,  $\lambda_L/2$  approach  $p/2$ .

An experimental evidence is given by the interferograms obtained by Moore *et al.* at 2837 Hz (Fig.1.11). The motion of the board is clearly guided between the ribs (nodes of vibration acting as local stiffeners).



(a)  $f \approx 2837$  Hz, strings slacked.



(b)  $f \approx 2837$  Hz, strings normally tuned.

FIG. 1.11 – Visualisations of vibrations between ribs, from Moore *et al.* [92]. For this high frequency, the *inside boards* (between two adjacent ribs, running diagonally) vibrate.

Conklin [34] has confirmed experimentally this influence of ribbing on the admittance. He built a soundboard with 39 ribs (more than twice the usual number), reducing the spacing  $p$  to a value of  $\approx 5$  to 6 cm. With this value, the first cut-off frequency (when  $\lambda_L = 2p$ ) is raised at the highest frequency of Conklin's interest, that is in his study the fundamental of the highest string of the piano:  $C_8 \approx 4186$  Hz. The height of the ribs was the same as those of a normally-designed

soundboard. Their width was changed to around 1.1 cm, approximately one half of the usual value, in order to keep almost the same stiffness and mass of the conventional board.<sup>10</sup> In his own words, Conklin's new soundboard *has improved uniformity of frequency response, improved and extended high frequency response, higher efficiency at higher frequencies, and improved tone quality*. Hence, the frequency-dependent attenuation at mid-frequency due to ribbing is clear.

### 2.2.2 Propagating modes (Berthaut)

For Berthaut [13], the piano soundboard behaves in high-frequency like the association of parallel *wave guides* limited by the ribs. In his own words: *above a certain frequency, waves can be reflected by the ribs, creating an array of interferences in each spatial period of the structure; this array may be seen as a superposition of propagating modes*. More precisely, propagation occurs in the direction of the ribs whereas the vibration is modal (stationary) in the other direction. Berthaut coins this regime as a "propagating mode"<sup>11</sup>.

Berthaut applied to the piano a predictive method developed by Ichchou [69] and Houillon [64] and called "propagating finite element method". This method yields the dispersion equation branches in stiffened plates, the wave numbers and the transverse mode shape in the direction normal to the stiffeners. In particular, it takes into account the torsional behaviour of the stiffeners. An experimental validation of this predictive method has been achieved in various test cases reported in [70] and [71]. It is also in good agreement with the analytical approach by Fahy and Lindqvist [51] which takes into account the following coupling: plate bending-stiffener bending, plate bending-stiffener torsion, plate torsion-stiffener torsion.

Transposed to a piano soundboard where the periodicity of the stiffeners (ribs) is only approximate, the results are not as conclusive as on stiffened aluminium plates, according to Berthaut. In particular, the appearance of different transverse modes of the guide seem to be exclusive one from each other. However, the author concludes that the wave guide analogy is valid, even for this pseudo-periodic structure.

We propose a simplified approach in section 2.2 of chapter 4.

## 2.3 Mechanical mobility (admittance)

### 2.3.1 Impedance mismatch

The research of a trade-off between loudness and sustain (duration) is a major issue for piano designers and manufacturers. The way by which the energy of vibration is transferred from the piano string to the soundboard depends in particular on the end conditions of the strings at the

---

<sup>10</sup>The moment of inertia  $I_{\text{rib}}$  of a rib that determines its stiffness is proportional to its width  $a$  but varies as the cube of its height  $b$ :  $I_{\text{rib}} = ab^3/12$ .

<sup>11</sup>In the context of the pipes of wind instruments, it would be called "transverse modes of the pipe". This terminology loses clarity when end conditions are considered (soundboard edges): the vibration in the wave guide becomes modal itself.

bridge. This is a classical problem of impedance match between a source (the string) and a load (the soundboard).

The load presented to the string can be described by the admittance  $Y(\omega)$  (also called mechanical mobility) at the connecting point (bridge) between the string and the soundboard. The admittance defines the relationship between the local velocity  $V$  and the excitation force  $F$ . Since these quantities are both of vectorial nature,  $Y$  is a  $3 \times 3$  matrix. In principle, the reciprocal quantity – the impedance  $Z = Y^{-1}$  could be used as well. In most mechanical systems however (including musical string instruments) the force is imposed in one direction only and the other directions are left totally free. Such systems are much more conveniently described by the mobility matrix since only three coefficients are necessary, one for each direction of velocity to evaluate [23]<sup>12</sup>. If, in addition, only one direction of motion is under investigation, only one mobility coefficient remains to be known. In what follows, the notation  $Y$  means the ratio between the velocity and the force in the direction normal to the soundboard<sup>13</sup>.

The characteristic mobility of transverse waves in a piano string is always much higher than that of the soundboard. Literature more often deals with the characteristic impedance and with the impedance-like quantity  $Y^{-1}$  at the bridge. The former ranges typically from  $\approx 10 \text{ kg s}^{-1}$  for the long and thick bass strings to  $\approx 5 \text{ kg s}^{-1}$  in the treble [5]. The latter is almost 100 times larger with an average low-frequency level near  $10^3 \text{ kg s}^{-1}$ . According to Askenfelt [5], piano makers have reached this value empirically since *[it] gives the proper amount of coupling and decay rate suitable for musical purposes*. Pianos having a larger soundboard mobility at the bridge tend to sound harsh and to exhibit less than normal durations of tones, according to Conklin [35]. Conversely, if the mobility level falls significantly lower, the duration will be longer than normal while, at the same time, the output will seem subnormal.

### 2.3.2 Measurements at the bridge (Wogram, Nakamura, Conklin, Giordano)

Only four measurements of the admittance (or impedance) at the bridge of a piano soundboard have been published: Nakamura [93] (Figure 1.13) and Conklin [35] (Figure 1.17) present the mobility at bridge whereas Wogram [126] (Figure 1.12) and Giordano [55] (Figure 1.14) claim to have measured the impedance. All of these measurements are done in the direction normal to the soundboard and for upright pianos with strings muted. Conklin measured both the mobility normal to soundboard and the mobility in direction of strings of a concert grand.

Wogram published the first impedance measurements [126]. He used an electrodynamic shaker to drive the board and an impedance head to measure at the same point the excitation force and vibration velocity. Typical results near the centre of the board are reported in figure 1.12. The resonances in the soundboard motion appear as the minima of the impedance magnitude,

<sup>12</sup>The description by the impedance would require the inversion of  $Z$ , needing all nine coefficients to be known. The impedance is suited to systems where *velocities* are imposed, with possibly null-velocity conditions in some directions (blockage). This is seldom the case in musical instruments.

<sup>13</sup>It would be the  $Y_{zz}$  coefficient of the full matrix and one should notice in the line of the previous discussion that  $Z_{zz} \neq Y_{zz}^{-1}$ .

corresponding to  $\varphi = 0^\circ$  on the ascending  $\varphi$  curve. Between 100 and 1000 Hz, the average value of the impedance is roughly  $10^3 \text{ kg s}^{-1}$ . Above this range,  $|Z|$  decreases uniformly at a rate of about 5 dB per octave to approximately  $160 \text{ kg s}^{-1}$  at  $10^4 \text{ Hz}$ . This rapid falloff, almost inversely proportional to frequency, is likely a measurement artefact: *it has the definite appearance of some purely springy impedance which is somehow appearing in parallel with the measured one*, according to Weinreich [123]. Giordano [55] adds: *it could have been caused by an effective decoupling of his impedance head from the soundboard at high frequencies*.

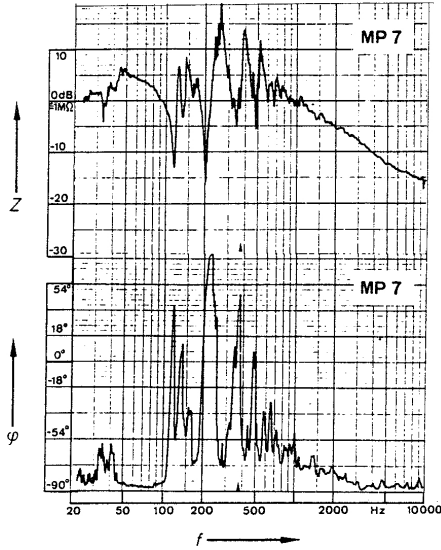


FIG. 1.12 – Magnitude of the impedance  $|Z|$  at bridge, and its phase angle  $\varphi$  measured at terminating point for strings of  $F\sharp_4$  (key n° 46) of an upright piano in playing situation, after Wogram [126].

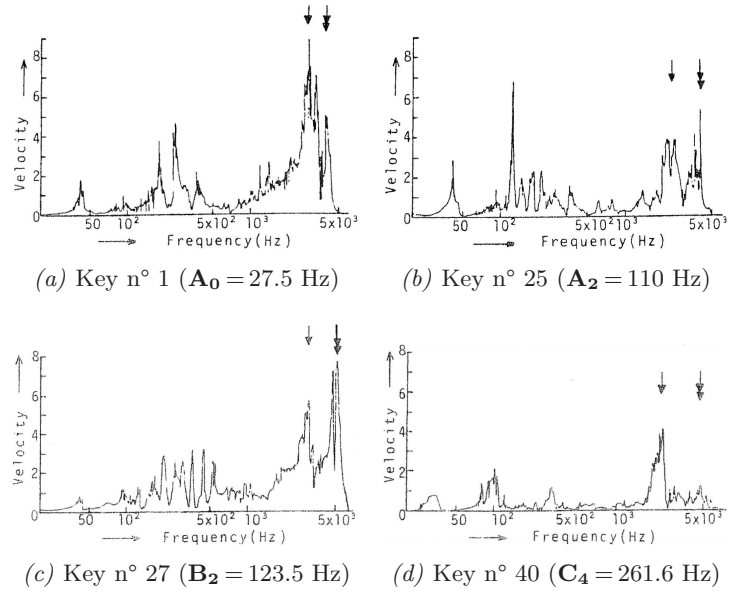


FIG. 1.13 – Mobility at bridge at different terminating point of an upright piano in playing situation, after Nakamura [93].

Nakamura also had troubles in the high frequency range: the resonances of his driver and detector seem to have influenced heavily the coupling in this frequency range. The graphs presented for a wide frequency band (up to 5 kHz) in Figure 1.13 are the velocity normalised by the fixed driving force measured at different point of the bridges of an upright piano assembled and tuned. This quantity corresponds to the admittance at the driving point. On the graphs (Figure 1.13), the resonances of the driver and detector are pointed out by a single arrow and a double arrow respectively. Above  $1 \text{ kHz}^{14}$ , the mobility becomes suddenly much larger. Besides the level of resonances, this general mobility increase is, according to Nakamura, due to *vibrations between ribs; in the high frequency, the ribs become the fixed edge and the inside board vibrates*<sup>15</sup>. However, Nakamura's measurements need to be reconsidered in the high frequency range.

Measurements done later by Giordano [55] (see Figure 1.14) confirm this step-like falloff in the

<sup>14</sup>Note that this value is the same as in Wogram's measurements.

<sup>15</sup>Nakamura adds in the same paper that he obtained Chladni patterns were vibrations between ribs are recognised, above 1.2 kHz. Unfortunately, these figures have not been published.

local impedance (or mobility increase) at high frequencies. Giordano notices that the step only occurs above approximately 2.5 kHz when the measurement is done at bridge.

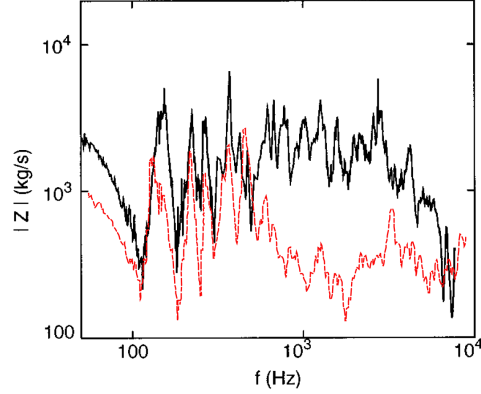


FIG. 1.14 – Comparison of the driving point impedance measured on an upright pianos in two different locations. — : at bridge (terminating point for strings of  $C_4$  – key n° 40), after Giordano [55]. - - : far away from the bridge, at a mid-point between two ribs.

It is interesting to notice that below the (first) impedance falloff ( $\approx 700$  Hz), the average levels of the impedance measured at the bridge near a rib ( $1$  to  $2 \cdot 10^3$  kg s $^{-1}$ ) and directly on the soundboard between ribs ( $0.6$  to  $0.7 \cdot 10^3$  kg s $^{-1}$ ) differ by a factor of 2 to 3, certainly due to the added stiffness by the bridge. The average low frequency impedance level measured at the bridge is comparable to Wogram's measurements.

Nightingale & Bosmans [94] studied the influence of the position of the driving point on the mobility of a periodic rib-stiffened isotropic plate. The space between the ribs was approximately 40 cm. The figure 1.15 points out that the real part of the mobility is a function of the distance to the nearest adjacent rib: the mobility decreases with the distance to an adjacent rib.

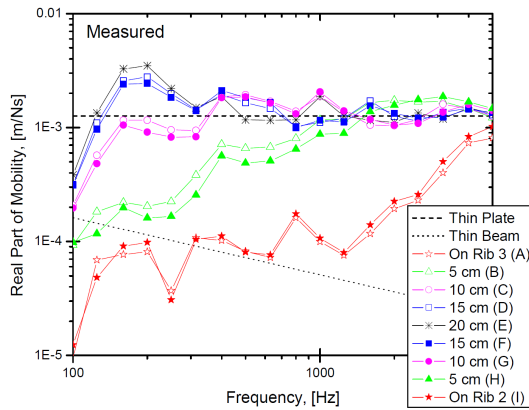


FIG. 1.15 – Real part of the driving point mobility measured in different points of a ribbed plate, as a function of the distance from a rib, after Nightingale & Bosmans [94].

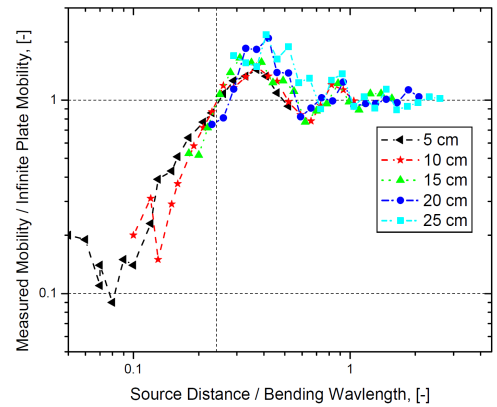


FIG. 1.16 – Normalised mobility as a function of the normalised wave number in the guide (see text for normalising factors), after Nightingale & Bosmans [94].

Besides, the mobility increases with frequency and tends to the mobility of an uncoupled

infinite plate at high enough frequencies. The figure 1.16 presents the mobility normalised by that of an infinite plate (asymptotic value of the left figure), plotted as a function of  $k d / (2\pi)$  where  $k$  is the wave number in the guide and  $d$  the distance of the point of interest to the nearest rib. The ribs have almost no effect when the ratio *distance to bending wavelength* is larger than 1; in other words, the ribbed plate behaves like an infinite uncoupled plate at these frequencies. When this ratio is less than  $\approx 0.25$  the influence of the ribs is large; the measured mobility is much less than that of the infinite plain plate.

These considerations explain why on the upright soundboard studied by Giordano, the impedance falloff between ribs appears at a much smaller frequency than when the impedance is measured on the treble bridge, close to a rib ( $\approx 700$  Hz for the red curve and  $\approx 2.5$  kHz for the black curve, in figure 1.14). Moreover, in the light of the conclusions of Nigthingale *et al.*, we can expect that the black and the red curves meet above 10 kHz, with a roughly constant impedance of 200 to 300 kg s<sup>-1</sup> corresponding to the characteristic impedance of the infinite plain board for bending waves.

Conklin's measurements [35] are, to our opinion, the more accurate and complete published measurements of the mechanical mobility at the bridge. Typical curves for the mobility normal to the soundboard are presented in figure 1.17. For the sake of comparison, we superpose two sets of measurements done for the same concert grand piano. The mobility when the strings and the plate have been removed appears in solid black line and the mobility at the same point when the instrument is fully assembled and tuned in dashed red line.

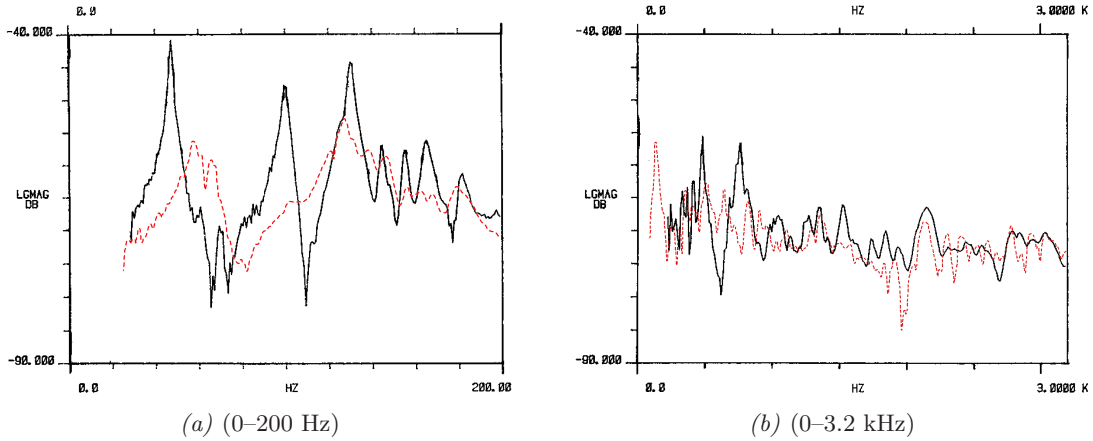


FIG. 1.17 – Bridge mobility (direction normal to the soundboard) of a grand piano at the terminating point of the  $\mathbf{E}_2$  strings (key n° 20), after Conklin [35]. — : strings and plate removed. - - : assembled and tuned.

Without the strings and plate, the mobility is characterised by a strong modal character up to  $\approx 200$  Hz. Higher in frequency, resonances are less and less pronounced, while at the same time the mean value remains constant up to 3.2 kHz.

When the metal frame and the strings are added, the mobility curve is substantially altered.



The frequencies of the first modes is increased while the peak values are about 15 dB less. This probably means that the modification of the structure has added damping. This effect can be considered as beneficial since it reduces fluctuations in mobility, as explained in 2.3.1. Above 1 kHz the mobility is less modified. No measurements of the mobility in the direction normal to the soundboard have been published by Conklin above 3.2 kHz.

Conklin measured also the mobility at the bridge in the strings direction (see figure 1.18), with and without the frame and strings. Again two curves are superimposed in the figures: the mobility normal to the board (solid black line) and the "longitudinal mobility" (dashed blue line) measured at the same point.

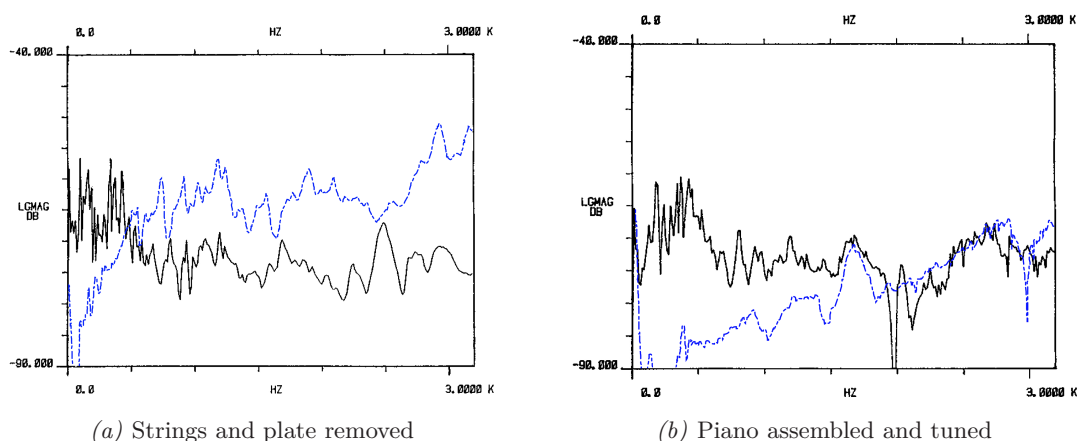


FIG. 1.18 – Comparison of the transverse and longitudinal mobilities between 0 and 3.2 kHz at the end point of the  $C_6$  strings (key n° 64) of a grand piano, after Conklin [35]. —: mobility in the direction normal to the soundboard. - - -: mobility in the string direction.

In the treble section ( $C_6$  strings) and when the board is unloaded, the latter can be surprisingly larger than the former (by 10 to 20 dB) above  $\approx 1$  kHz (Fig. 1.18.a). The effect of the assembling on the longitudinal mobility is important: overall decrease of about 10–15 dB (the large longitudinal tension added by the strings to the bridge stiffens it and increases its longitudinal impedance). Thus, for a piano in playing situation, the longitudinal mobility in treble region is comparable to the mobility in the direction normal to the board for frequencies between 2–3 kHz (Fig. 1.18.b). It would be erroneous to ignore this mobility when dealing with the high-frequency tone of the piano sound. Askenfelt adds [5]: *longitudinal string motion, which is known to influence the perception of bass notes, will thus be able to drive the soundboard rather efficiently in the high-frequency range.*

## 2.4 Sound radiation

To this date, the most complete study on the sound radiation of the piano has been published by Suzuki [115]. It is an experimental study on a small grand piano which carries the following conclusions:

Below 80 Hz, the radiation efficiency of the soundboard (defined as the ratio between the

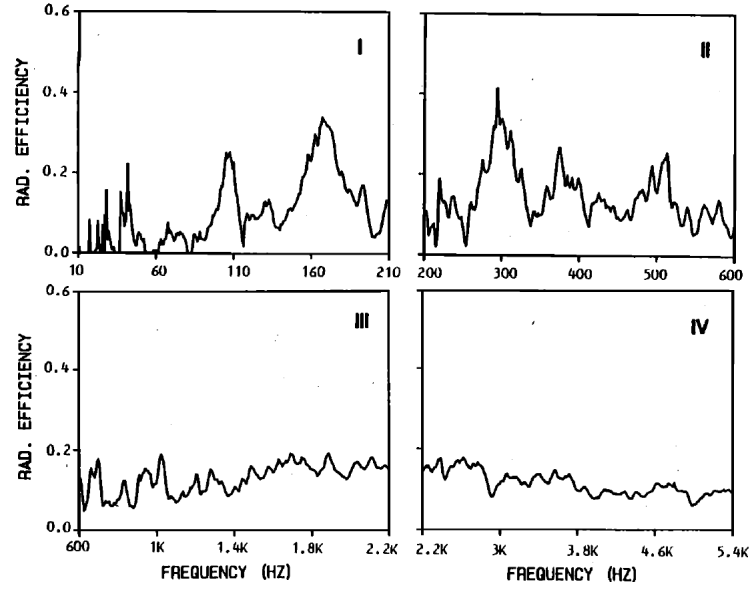


FIG. 1.19 – Radiation efficiencies of a piano soundboard, after Suzuki [115]

acoustical radiated power to the injected mechanical power) is very small, as indicated in figure 1.19. This is due to the acoustical short-circuit between the two sides of the soundboard: *the upper and lower surfaces of the soundboard vibrate in opposite phase, and when the source separation distance round the rim (roughly 2m for a grand piano) becomes less than half a wavelength, an efficient cancellation of the sound radiation occurs.* Askenfelt [5]. A straightforward consequence is that the sound level of the first partial of the lower notes (which is less than the first resonance frequency of the soundboard) is very low.

The radiation efficiency displays fluctuations up to roughly 1 kHz. Above, it reaches a fairly high and stable value, around 16%. The critical domain (see section 2.1 of Appendix E) of the orthotropic plate (where the air-borne sound wavelengths become shorter than those of the bending waves in the plate) is evaluated by Suzuki between 1.2 and 1.6 kHz. Above this frequency domain, the normalised radiation impedance (not represented here) becomes approximately 1: energy is transmitted very efficiently from the soundboard to air.

The very gradual decrease in radiation efficiency above 3.5 kHz may be due to the increase of the wood internal losses at these frequencies (see figure E.1) [31].

### 3 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les fonctions dynamiques et statiques de la table d’harmonie du piano, son matériau et sa structure. La synthèse bibliographique effectuée a permis de mettre en évidence la complexité du comportement vibratoire de la table, en particulier lorsque la fréquence augmente. Rares sont les analyses modales dépassant les 200 Hz ; pour des fréquences plus élevées on ne dispose globalement que de quelques mesures de mobilité au chevalet menées sur un petit nombre d’instrument.



Un enjeu majeur réside donc dans la mesure précise de paramètres vibratoires globaux de la structure comme la densité modale ou l'amortissement moyen à des fréquences élevées (supérieures à 500 Hz). Ce sera l'objet du chapitre 3 où nous appliquerons à une table de piano droit la méthode d'analyse modale haute résolution développée au chapitre 2.

## Chapitre 2

# Analyse modale aux moyennes fréquences : Méthode et validation

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Techniques d'identification des structures.....</b>	<b>32</b>
1.1	Domaines fréquentiels – Transitions .....	32
1.2	Méthodes d'identification modale.....	33
1.3	Modèles prédictifs hautes fréquences – SEA.....	34
<b>2</b>	<b>Proposition d'analyse modale haute résolution.....</b>	<b>35</b>
2.1	Les méthodes paramétriques haute résolution.....	35
2.2	Applications en acoustique musicale et en vibrations des structures.....	36
2.3	La méthode.....	37
<b>3</b>	<b>« High-resolution modal analysis » (article publié par le JSV) .....</b>	<b>40</b>
<b>4</b>	<b>Limitations de la méthode – Perspectives.....</b>	<b>59</b>
4.1	Incertitudes sur la position d'impact et l'angle d'impact .....	59
4.2	Rapport signal à bruit.....	59
<b>5</b>	<b>Conclusion.....</b>	<b>60</b>

---

Ce chapitre présente la méthode d'analyse modale que nous avons développée, basée sur des techniques existantes de traitement de signal haute résolution (méthodes dites *sous-espaces*). Elle permet d'étendre les approches traditionnelles utilisant la transformée de Fourier, adaptées au domaine des basses fréquences, vers celui des moyennes et hautes fréquences où des techniques basées sur des modèles prédictifs (comme l'Analyse Statistique de l'Énergie) existent.

Dans une première partie nous donnons une définition des différents domaines fréquentiels et nous passons en revue les principales techniques d'identification des structures. Puis nous exposons la méthode haute résolution retenue, validée sur des plaques minces en aluminium et pour des domaines fréquentiels à recouvrement modal élevé. L'article "*High-resolution modal analysis*" que nous avons publié dans le *Journal of Sound and Vibration* [47] synthétise les différentes étapes de la méthode ainsi que les résultats obtenus et c'est pourquoi nous avons fait le choix de le

reproduire dans son intégralité à cet endroit du manuscrit. Enfin, les limitations de la méthode et les perspectives possibles sont discutées dans une dernière partie.

## 1 Techniques d'identification des structures

### 1.1 Domaines fréquentiels – Transitions

Dans la réponse dynamique d'une structure, trois domaines fréquentiels sont usuellement définis : *basses*, *moyennes*, et *hautes* fréquences (voir la figure 2.1). Dans le premier, celui des basses fréquences, le comportement vibratoire possède un fort caractère modal. La réponse dynamique présente des résonances très prononcées. Lorsque la fréquence augmente, on observe un phéno-

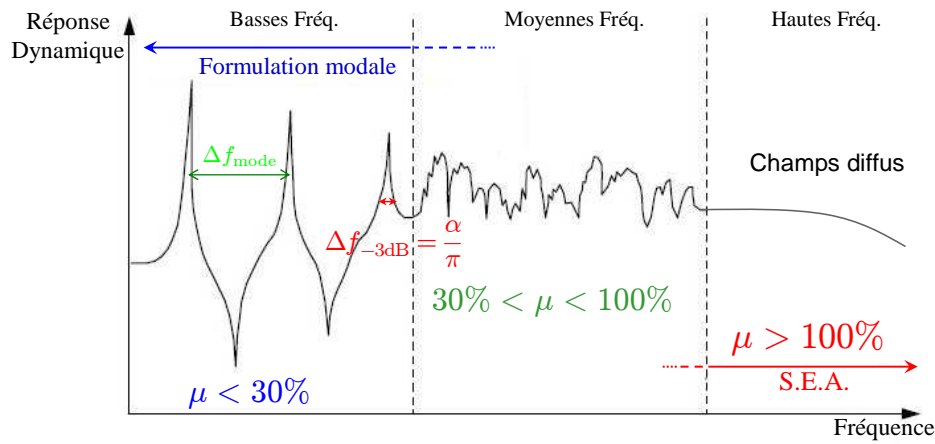


FIG. 2.1 – Réponse dynamique d'une structure et domaines fréquentiels, schéma inspiré de Berthaut [13].

mène de densification modale. Le recouvrement modal augmente, les résonances sont de moins en moins prononcées et la réponse de la structure tend alors vers un comportement *continu* qui peut être décrit comme un *champ diffus*. L'indicateur  $\mu$  appelé *facteur de recouvrement modal* (voir par exemple Lyon [86]) permet de quantifier les limites entre ces trois domaines spectraux. Il est défini comme le rapport entre la largeur de bande à  $-3$  dB (ou bande passante modale) et l'espacement intermodal (voir la figure 2.1) :  $\mu(f) = \frac{\Delta f_{-3 \text{ dB}}}{\Delta f_{\text{mode}}}$ . Ainsi en supposant la largeur de bande

constante au voisinage de la fréquence  $f$ , on a le recouvrement modal  $\mu(f) = \frac{\eta(f) f}{\Delta f_{\text{mode}}} = \frac{n(f) \alpha(f)}{\pi}$  où  $n(f)$  est la densité modale (définie à la section 1.2 du chapitre 3), et  $\alpha = \eta \omega / 2$  est le facteur d'amortissement modal.

**Transition basses–moyennes fréquences** – En théorie, pour un système linéaire faiblement amorti, la représentation modale est valide pour tout le spectre dans la mesure où aucune hypothèse sur la fréquence n'est faite. En pratique, les limitations sont dues aux méthodes utilisées. Avec la fréquence, les modes se "mélagent", se "brouillent" et les techniques traditionnelles d'identification modale basées sur la transformée de Fourier (TF) deviennent inefficaces. La résolution liée au fenêtrage temporel du signal rend la TF mal adaptée pour estimer des modes dont

l'écart fréquentiel est proche de l'élargissement spectral dû à l'amortissement. Dans les faits ces méthodes atteignent leur limites pour des recouvrements modaux de l'ordre de 30% (Lyon [86] ou Berthaut [14]). Nous retiendrons cette valeur de recouvrement modal comme limite basse du domaine des moyennes fréquences.

**Transition moyennes-hautes fréquences** – Il est généralement admis que l'on appelle hautes fréquences le domaine spectral où l'hypothèse de champ diffus est valide. La situation limite inférieure de champ diffus est atteinte lorsque la largeur de bande à  $-3$  dB dépasse l'espacement intermodal, d'après Skudrzyk [111]-[113] ou Lesueur [82]. En d'autres termes, on entre dans le domaine des hautes fréquences lorsque le recouvrement modal  $\mu$  devient supérieur à 100%. La figure 2.2 schématise cette situation. La fréquence limite inférieure du champ diffus donnée par Skudrzyk [111] s'écrit alors simplement  $f_{\text{lim}} = [n(f)\eta(f)]^{-1}$ .

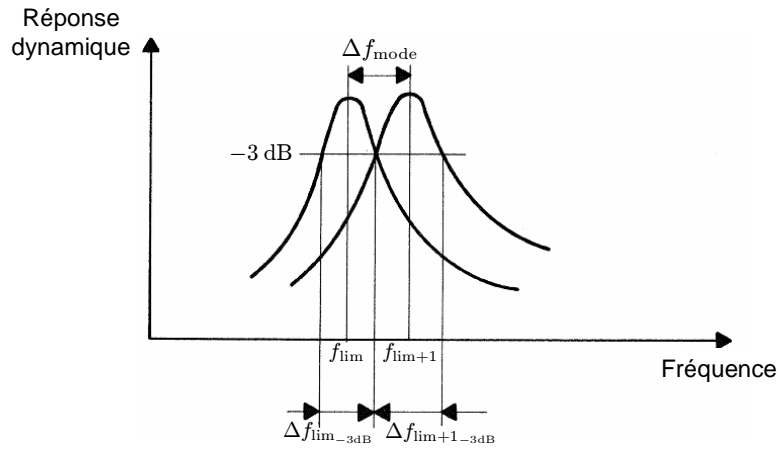


FIG. 2.2 – Fréquence limite inférieure du champ diffus, schéma d'après Lesueur [82].

Le domaine des moyennes fréquence (ou des fréquences *intermédiaires*) se voit donc être défini, dans les faits, comme le domaine où ni les méthodes dites *fréquentielles* d'identification modale, ni les techniques basées sur des approches propagatives faisant l'hypothèse de champ diffus ne fonctionnent.

## 1.2 Méthodes d'identification modale

Dans le formalisme modal présenté dans l'annexe B chaque mode  $\nu$  est défini par sa *déformée modale* ou *amplitude modale complexe*  $b_\nu = a_\nu e^{i\varphi_\nu}$  ( $\varphi_\nu$  est la *phase* modale), sa *fréquence modale*  $f_\nu$  et son *coefficient d'amortissement modal*  $\xi_\nu$ . L'identification modale consiste alors à déterminer pour chacun des modes les triplets  $\{b_\nu, f_\nu, \xi_\nu\}$  à partir de mesures expérimentales effectuées en différents points de la structure étudiée. Il existe pour cela une multitude de méthodes. Norton [95] les classe dans deux grandes familles : les méthodes *fréquentielles* et les méthodes *temporelles*. Le lecteur pourra trouver dans l'ouvrage de Ewins [50] un état de l'art des principales méthodes.

**Les méthodes fréquentielles** – Elles opèrent dans l'espace de Fourier. Si le recouvrement est suffisamment faible, chaque résonance peut être étudiée séparément. L'idée est donc de se

ramener au cas d'un oscillateur *isolé* à un degré de liberté (voir l'annexe B). Les triplets modaux se déduisent alors de la mesure de la hauteur, position, et largeur de bande à mi-hauteur du pic de résonance. Des méthodes plus poussées existent telles que la fraction rationnelle complexe, le lissage du cercle (lieu de Nyquist) ou le lissage global (voir l'état de l'art à ce sujet de Piranda [98] notamment). Berthaut a comparé leur efficacité dans [13]. Selon l'auteur, il semble en ressortir qu'aucune ne permet de séparer et d'identifier correctement les paramètres modaux pour des recouvrements modaux de l'ordre de 30% à 50%.

**Les méthodes temporelles** – Si l'on suppose toujours que les modes sont bien isolés et peu amortis, la structure répond en temps – à la pulsation modale  $\omega_\nu$  – comme un système linéaire à un degré de liberté, et le déplacement s'écrit alors en oscillations libres :

$$w_\nu(x, y, t) = a_\nu(x, y)e^{-\alpha_\nu t} \cos(\omega_\nu t + \varphi_\nu(x, y)) \quad (2.1)$$

Une simple mesure de la constante de temps  $\tau_\nu$  de l'oscillateur fournit alors directement le coefficient d'amortissement  $\xi_\nu = (\tau_\nu \omega_\nu)^{-1}$ . C'est l'idée de base des méthodes temporelles. L'avantage de celles-ci sur les méthodes fréquentielles repose bien sûr dans le fait qu'elles s'affranchissent des limites de la TF en termes de résolution. Les plus efficaces sont la méthode d'Ibrahim (ITD) [50] ainsi que les méthodes d'estimation paramétrique de type *sous-espaces*. La supériorité de ces dernières, dites à *haute résolution*, se révèle particulièrement pour l'analyse de signaux fortement amortis, sur des fenêtre temporelles courtes et pour des fréquences modales proches [79]. Ce sont ces méthodes que nous avons choisi de mettre en œuvre dans notre étude. Elles font l'objet de la section 2.

### 1.3 Modèles prédictifs hautes fréquences – SEA

En hautes fréquences, la réponse ne dépend plus du point d'excitation : la structure peut-être considérée comme infinie. Une manière de voir les choses est de considérer l'admittance au point d'excitation (chapitre 4 section 2.1.1) : l'hypothèse de champ diffus signifie que pour une fréquence d'excitation  $f_{\text{exc}}$  supposée supérieure à  $f_{\text{lim}}$  la contribution du mode de fréquence la plus proche de  $f_{\text{exc}}$  est petite comparée à la somme des contributions de tous les autres modes [111]. Pour Lesueur [82] : *la réponse sera plus influencée par le "paquet de modes" présents dans la bande excitée que par un mode particulier, [...] ce n'est pas la fréquence propre particulière qui sera importante mais le nombre de modes ou paquet de modes touchés par l'excitation*. On est alors conduit plutôt à adopter une démarche statistique en effectuant des moyennes fréquentielles [32]. Les approches *modales* laissent alors place aux approches *ondulatoires*.

Les méthodes utilisées dans ce domaine fréquentiel sont soit des *techniques d'identification des paramètres propagatifs* (identification du nombre d'onde complexe dans une direction de propagation donnée), soit des *modèles prédictifs* (ou *méthodes prévisionnelles*) qui nécessitent la connaissance de paramètres de propagation particuliers comme l'amortissement ou l'équation de dispersion. Toutes supposent un fort recouvrement modal et font appel à une représentation fortement

*ondulatoire* du comportement. Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur à Berthaut [13] qui dresse un état de l'art assez complet des différentes techniques existantes dans ce domaine fréquentiel. Nous ne citerons ici que la méthode SEA (Analyse Statistique de l'Energie) – née des travaux de Lyon et Maidanik [85], [84] – où les variables considérées ne sont plus *cinématiques* mais sont des grandeurs *énergétiques*. C'est une des méthodes les plus utilisées, à la fois dans le domaine académique et le domaine industriel. La SEA formule les échanges vibratoires entre systèmes dynamiques couplés sous la forme d'un bilan de puissance (voir Borello [22] ou Lesueur [82]). Elle repose sur les hypothèses suivantes (Bernier [11]) : une excitation stationnaire ergodique ou harmonique, une densité modale élevée et une répartition égale de l'énergie vibratoire entre les modes. L'utilisation de cette méthode énergétique nécessite en outre de connaître les *indicateurs globaux* de chacun des sous-systèmes que sont la densité modale, le facteur de pertes par dissipation et le facteur de pertes par couplage caractérisant le transfert d'énergie entre les différents sous-systèmes. Or la source d'erreur majeure de la SEA vient précisément de la méthode de calcul de ces facteurs de pertes par couplage qui suppose que l'énergie vibratoire *diffuse*. C'est cette propriété de *diffusion* qui permet de passer d'une représentation modale du champ vibratoire à une représentation sous forme d'ondes propagatives [22], simplifiant alors notablement l'analyse du problème. On comprend donc mieux pourquoi la SEA tout comme les autres méthodes propagatives donnent des résultats très approximatifs dans les moyennes fréquences où le champ diffus n'est pas vérifié.

## 2 Proposition d'analyse modale haute résolution

### 2.1 Les méthodes paramétriques haute résolution

Le principe des méthodes dites *haute résolution* (HR) repose sur un modèle *paramétrique* du signal. Elles supposent que le signal à analyser  $s(t)$  est composé d'une somme  $x(t)$  de sinusoïdes dont l'amplitude varie exponentiellement – appelée signal déterministe – et d'un bruit blanc gaussien  $\beta(t)$  :

$$s(t) = x(t) + \beta(t) = \sum_{k=1}^K a_k e^{-\alpha_k t} e^{i(2\pi f_k t + \varphi_k)} + \beta(t) = \sum_{k=1}^K b_k z_k^t + \beta(t) \quad (2.2)$$

où les  $b_k = a_k e^{i\varphi_k}$  sont les *amplitudes complexes*, les  $z_k = e^{-\alpha_k t + 2\pi i f_k t}$  sont les *pôles complexes* et l'entier  $K$  est le nombre d'exponentielles complexes. On voit ainsi que ce *modèle de signal* appelé Exponential Sinusoidal Model (ESM) est adapté à la description de l'amortissement naturel des systèmes vibratoires linéaires libres.

Le principal intérêt des méthodes paramétriques réside dans le fait qu'en l'absence de bruit, elles n'ont pas de limite théorique en termes de résolution spectrale : elles ne sont pas sensibles aux problèmes liés au fenêtrage qui apparaissent avec la transformée de Fourier, d'où le qualificatif *haute résolution*. Pour Badeau [8] : *leur précision et leur résolution fréquentielles sont virtuellement infinies*. En contrepartie *le prix à payer est une complexité de calcul plus importante* selon

David [40]. Ainsi en pratique la résolution est finie puisque le temps de calcul est fini. Mise à part leur forte complexité algorithmique, la principale limitation des méthodes HR vient de leur sensibilité aux erreurs de modélisation : elles sont bien évidemment inadaptées à l’analyse de signaux qui ne seraient pas proche du modèle ESM.

L’origine des méthodes HR est antérieure à la TF et remonte aux travaux de Prony [103] à la fin du XVIII<sup>ème</sup> siècle. L’approche qui visait à estimer une somme d’exponentielles par des techniques de prédiction linéaire a été approfondie plus récemment par Pisarenko [99] pour estimer des sinusoides. Les techniques plus modernes, parmi lesquelles les méthodes MUSIC<sup>1</sup> [108], Matrix Pencil [65] et ESPRIT<sup>2</sup> [104, 105] s’appuient sur la décomposition de l’espace des données en deux sous-espaces propres de la matrice de covariance : le *sous-espace signal* engendré par les composantes sinusoidales et le *sous-espace bruit* qui est son complémentaire orthogonal. D’après Badeau [8], ces méthodes de type sous-espaces sont connues pour être plus robustes que les techniques de prédiction linéaire. En particulier l’étude statistique des diverses techniques d’estimation a montré que la méthode ESPRIT – qui tient compte de la propriété d’invariance rotationnelle du sous-espace signal – est la plus performante [8] (ESPRIT est par exemple moins sensible au bruit<sup>3</sup> que les autres méthodes HR). Les différentes étapes de l’algorithme ESPRIT, cœur de notre méthode d’analyse modale aux moyennes fréquences, sont présentées en détail dans l’article *High-resolution modal analysis* (section 3).

## 2.2 Applications en acoustique musicale et en vibrations des structures

Depuis le développement de l’algorithme ESPRIT en 1986, plusieurs auteurs y ont fait appel dans le domaine de l’acoustique et des vibrations.

Laroche [79] est le premier, en 1993, à mettre en lumière l’efficacité des méthodes HR dans l’analyse de différents types de signaux musicaux : coup de tambour, admittance normale au chevalet d’une guitare et son de piano. L’originalité de son travail repose en particulier dans le *préconditionnement* des signaux mesurés. Afin de réduire le temps de calcul et augmenter la précision des résultats il propose un conditionnement du signal qui permet de diminuer le nombre de composantes et le nombre de points à analyser par ESPRIT. La technique de démodulation consiste en un filtrage passe bande autour de la bande fréquentielle d’intérêt, un décalage fréquentiel vers zéro et une décimation. La méthode montre en particulier son efficacité pour traiter les battements et la décroissance multiple des doublets ou triplets des cordes du piano (phénomène de couplage au chevalet étudié par Weinreich notamment dans [122]).

Le travail de Laroche – précisément la technique de démodulation proposée – a ouvert la voie à plusieurs applications en acoustique musicale. Les auteurs ayant utilisé l’algorithme ESPRIT pour analyser des signaux musicaux sont classés chronologiquement ci-dessous :

<sup>1</sup>Multiple Signal Classification

<sup>2</sup>Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques

<sup>3</sup>La variance de l’estimateur ESPRIT a été calculée par Hua et Sarkar [66] : elle reste toujours très proche de la borne de Cramér-Rao, sa borne inférieure théorique [40].

- Lambourg et Chaigne [76] appliquent la méthode ESPRIT pour construire un jeu de filtres reproduisant les termes de la matrice d'admittance au chevalet d'une guitare mesurés suivant deux directions (normale et dans l'axe du chevalet).
- Dérogis [45, 44] estime les fréquences, amortissements et déformées modales des premières résonances d'une table d'harmonie de piano droit.
- David [41, 40] estime le facteur de rayonnement d'une guitare acoustique en comparant les paramètres modaux obtenus par ESPRIT pour la structure vibrante dans l'air et en atmosphère raréfiée.
- Doutaut [43, 30] estime les fréquences et amortissements des lames de xylophone et de vibraphone pour implanter et tester un modèle de synthèse numérique de ces instruments.
- Lambourg [75, 32], à des fins de simulation numérique également, estime les paramètres modaux de plaques vibrantes, notamment en bois d'épicéa destiné à la lutherie de guitare.

Un problème récurrent à toutes ces études réside dans l'évaluation du nombre  $K$  de composantes présentes dans le signal (voir l'équation 2.2). Une méthode fréquemment employée par les auteurs précédents est de surestimer ce nombre (un ordre de grandeur de la densité modale peut être obtenu grossièrement par une analyse spectrale de Fourier) et d'éliminer dans un second temps les résultats aberrants : composantes de très faible amplitude ou de trop fort amortissement. L'erreur de reconstruction – entre le signal mesuré et celui resynthétisé avec les paramètres modaux estimés – est également un indicateur souvent utilisé. Toutefois ces critères restent très fortement empiriques et trop subjectifs. Or pour Badeau [8] *la détermination de l'ordre de modalisation est une étape essentielle du processus d'estimation car elle conditionne toute la suite de l'analyse haute résolution du signal*. C'est pourquoi il a proposé récemment [8, 9] un critère rigoureux de sélection de  $K$  – appelé ESTER<sup>4</sup> – qui consiste à minimiser l'erreur sur la propriété d'invariance rotationnelle d'une base de l'espace signal en fonction de l'ordre du modèle. Appliqué à un signal synthétique bruité et à un signal musical (son de piano), Badeau a montré la pertinence de ce critère en comparant ses performances à celles d'autres *critères de théorie de l'information* classiques. Enfin, munis du critère ESTER, Le Carrou *et al.* [80, 81] ont dernièrement identifié expérimentalement les *modes sympathiques* (modes de cordes couplées) d'une harpe de concert.

### 2.3 La méthode

Le critère ESTER couplé à la méthode ESPRIT nous a semblé offrir de nouvelles perspectives dans l'analyse modale aux moyennes fréquences. La possibilité d'estimer de façon précise la densité modale dans ce domaine fréquentiel nous a encouragé à poursuivre dans cette voie et à développer une nouvelle méthode temporelle d'analyse modale basée sur ces techniques de traitement de signal haute résolution.

---

<sup>4</sup>ESTimation ERror



### 2.3.1 Schéma-bloc

La procédure est résumée dans le schéma-bloc reproduit à la figure 2.3. Pour ne pas être redondant, nous ne développerons pas ici les étapes de la méthode ; nous renvoyons le lecteur à l'article reproduit à la section 3.

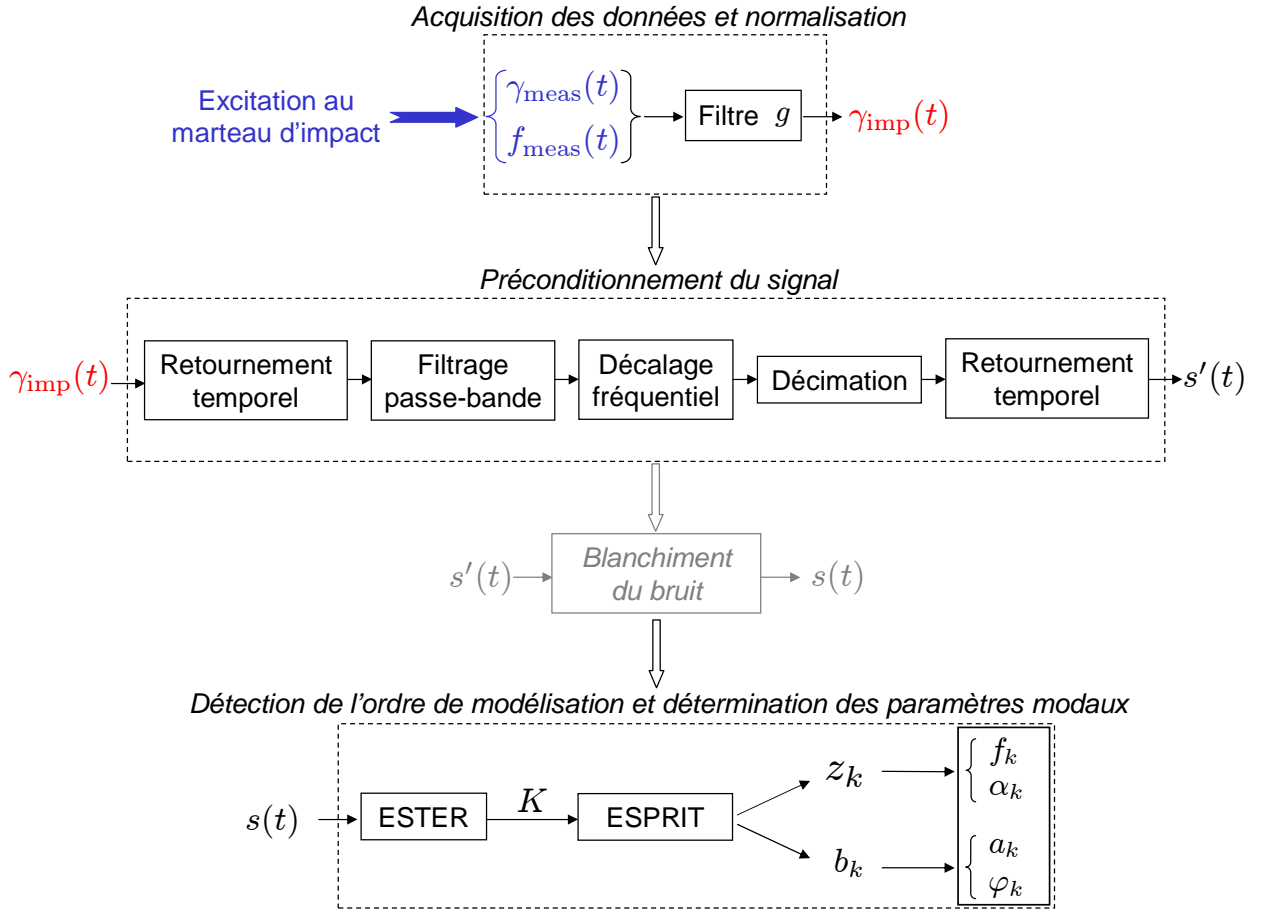


FIG. 2.3 – Schéma-bloc de la méthode d'analyse modale haute résolution proposée [47].

Une des principales nouveautés de cette méthode réside dans la reconstruction de la réponse impulsionnelle (complètement indépendante de l'analyse des signaux proprement dite). L'obtention expérimentale de la réponse d'une structure peut se faire grâce à l'excitation ponctuelle par marteau d'impact. Comme l'excitation n'est jamais strictement impulsionnelle, chaque réponse doit être au préalable normalisée par l'impulsion qui l'a provoquée. L'analyse modale traditionnelle procède par division des deux spectres. Il est préférable d'éviter ici cette technique car la division par de très faibles valeurs risque d'introduire des composantes fictives qui seraient ensuite prises en compte par l'analyse paramétrique. Ici, nous estimons donc la réponse impulsionnelle  $\gamma_{\text{imp}}(t)$  en deux temps [47, 48] :

- Estimation du filtre  $g$  (à réponse impulsionnelle finie) qu'il faudrait appliquer à la force  $f_{\text{meas}}(t)$  exercée par le marteau d'impact sur la structure pour que cette force devienne une impulsion.
- calcul de  $\gamma_{\text{imp}}$  à partir de la réponse réelle mesurée  $\gamma_{\text{meas}}$  et du filtre  $g$  estimé précédemment.

### 2.3.2 Blanchiment du bruit

Les méthodes paramétriques HR sont inadaptées à l'analyse de signaux qui ne seraient pas proches du modèle ESM (équation 2.2). En particulier pour appliquer l'algorithme ESPRIT de manière robuste il est important que le bruit additif soit blanc. La décomposition en sous-bandes que nous effectuons lors du préconditionnement des signaux induit naturellement un effet "blanchissant" : dans une bande fréquentielle étroite le bruit peut être considéré en première approximation comme blanc.

Néanmoins une étape supplémentaire de blanchiment du bruit peut parfois être nécessaire, notamment si la bande fréquentielle à analyser est trop large. Une technique simple proposée par Badeau [8] consiste alors à estimer la densité spectrale de puissance (DSP) du bruit pour en déduire un filtre blanchisseur dans chaque sous-bande. Premièrement la DSP du signal original est calculée, puis le spectre est *lissé* à l'aide d'un *filtre de rang* que l'on peut choisir insensible aux pics fréquentiels. Dans un filtre de rang les données sont triées par ordre croissant : le filtrage consiste à sélectionner la valeur dont l'ordre est égal à un rang prédéterminé [8]. Puis un estimateur de la fonction d'autocovariance du bruit est obtenu par transformée de Fourier inverse du spectre filtré. Enfin le filtre blanchisseur qui pourra être appliqué au signal original est calculé par prédiction linéaire sur cet estimateur.

Nous présentons à la figure 2.4 une application concrète de cette étape de blanchiment sur un signal large bande de piano [0 – 2.5 kHz]. Le signal est obtenu en excitant la troisième corde du

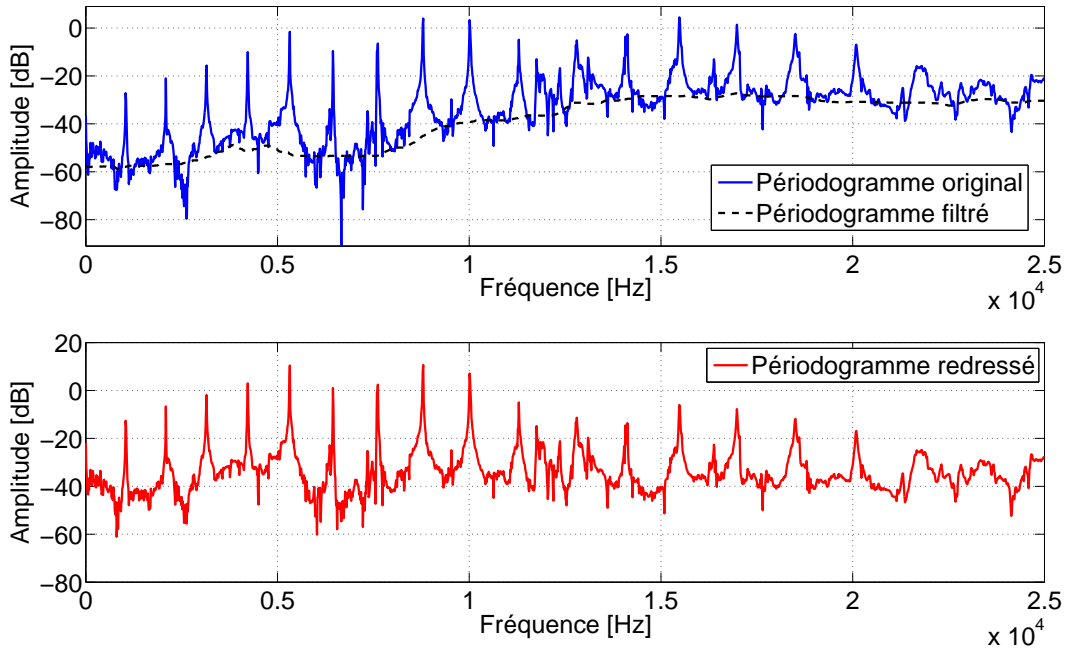


FIG. 2.4 – Blanchiment d'un signal comportant des sinusoïdes – densité spectrale de puissance avant et après blanchiment. La DSP du bruit original (*coloré*) est estimée en lissant le périodogramme original à l'aide d'un filtre de rang insensible aux pics fréquentiels.

triplet Do5 ( $f_{\text{fond}} \approx 1046$  Hz) du piano droit présenté au chapitre 3. Les autres cordes du piano (y compris les deux premières cordes du triplet en question) sont étouffées en différents points avec des bandes de feutre et de mousse. La corde libre est excitée à l'aide d'un plectre de guitare au même point d'excitation que le marteau correspondant : ici la distance au sillet est égale à environ  $1/10$  de la longueur vibrante<sup>5</sup> de la corde. L'accélération normale au chevalet est mesurée à l'aide d'un accéléromètre (*Brüel & Kjaer – ENDEVCO, Isotron 2250A-10*) fixé sur la table d'harmonie à l'arrière du piano (à l'opposé du point d'attache de la corde correspondante et du chevalet). Le signal analysé dure 2.4 s, et est échantillonné à la fréquence  $F_s = 50$  kHz. Le densité spectrale de puissance (carré du module de la TF du signal) appelée périodogramme, est calculée sur  $N_{\text{FFT}} = 2^{11}$  points. Elle est lissée en appliquant un filtre de rang de longueur  $Q_{\text{rang}} = 300 \approx N_{\text{FFT}}/7$  (choix empirique). Pour chaque fenêtre, les  $Q_{\text{rang}}$  valeurs extraites sont triées par ordre croissant et celle d'ordre  $Q_{\text{rang}}/4 = 75$  est sélectionnée (choix empirique également) : cette valeur correspond à la densité spectrale de puissance du bruit. Le filtre blanchisseur est enfin calculé par prédiction linéaire à l'ordre 4 sur la transformée de Fourier inverse de la DSP du bruit (l'ordre choisi est peu élevé de manière à lisser les variations locales du périodogramme [8]).

Dans la pratique nous n'avons pas eu besoin de cette étape de blanchiment du spectre lors de l'analyse en bandes étroites des signaux vibratoires des plaques et de la table d'harmonie de piano présentés dans l'article et dans le chapitre suivant.

### 3 « High-resolution modal analysis » (article publié par le JSV)

Nous reproduisons dans cette section l'article présentant en détail les différentes étapes de la méthode et synthétisant les résultats obtenus sur des plaques en aluminium tel qu'il a été publié en anglais dans le *Journal of Sound and Vibration* 325(4-5) :852–869, 2009.

---

<sup>5</sup>La longueur vibrante d'une corde de piano est la longueur comprise entre le sillet et les pointes au chevalet.



Contents lists available at ScienceDirect

## Journal of Sound and Vibration

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/jsv](http://www.elsevier.com/locate/jsv)

## High-resolution modal analysis

Kerem Ege<sup>a,\*</sup>, Xavier Boutillon<sup>a</sup>, Bertrand David<sup>b</sup><sup>a</sup> Laboratory for the Mechanics of Solids, École Polytechnique, F91128 Palaiseau Cedex, France<sup>b</sup> Télécom ParisTech/TSI - CNRS LTCI, 46 rue Barrault, 75634 Paris Cedex 13, France

## ARTICLE INFO

## Article history:

Received 24 October 2008

Received in revised form

2 April 2009

Accepted 13 April 2009

Handling Editor: K. Shin

Available online 14 May 2009

## ABSTRACT

Usual modal analysis techniques are based on the Fourier transform. Due to the  $\Delta T \Delta f$  limitation, they perform poorly when the modal overlap  $\mu$  exceeds 30%. A technique based on a high-resolution analysis algorithm and an order-detection method is presented here, with the aim of filling the gap between the low- and the high-frequency domains ( $30\% < \mu < 100\%$ ). A pseudo-impulse force is applied at points of interests of a structure and the response is measured at a given point. For each pair of measurements, the impulse response of the structure is retrieved by deconvolving the pseudo-impulse force and filtering the response with the result. Following conditioning treatments, the reconstructed impulse response is analysed in different frequency-bands. In each frequency-band, the number of modes is evaluated, the frequencies and damping factors are estimated, and the complex amplitudes are finally extracted. As examples of application, the separation of the twin modes of a square plate and the partial modal analyses of aluminium plates up to a modal overlap of 70% are presented. Results measured with this new method and those calculated with an improved Rayleigh method match closely.

© 2009 Elsevier Ltd. All rights reserved.

## 1. Introduction

In the dynamic response of a structure, three spectral domains are usually defined: low-, mid- and high-frequency. In general, each mode is described by a modal frequency, a modal damping factor, and a modal complex amplitude distribution (see e.g. Refs. [1,2]). The low-frequency domain is characterised by distinct resonance peaks and the strong modal character of the vibratory behaviour. When the frequency increases, the traditional modal identification methods cannot be used: damping increases, resonances are thus less pronounced, modes overlap and the frequency-response tends to a smooth curve. In the high-frequency domain, the vibration can be described as a *diffuse wavefield* (see e.g. Refs. [3–5]).

The modal overlap factor  $\mu$  is the ratio between the half-power modal bandwidth and the average modal spacing:  $\mu(f) = \Delta f_{-3\text{dB}} / \Delta f_{\text{mode}}$  (see e.g. Ref. [6]). The boundaries of the three spectral domains are established according to the values of  $\mu$ . One could define the low-frequency domain as the domain of application of modal analysis techniques: individual modes can be distinguished. It is generally admitted that the modal analysis techniques based on the Fourier transform meet their limits when the modal overlap reaches 30% (see e.g. Refs. [6,7]); this is due to the  $\Delta T \Delta f$  limitation of this signal processing method.

It is commonly considered that high-frequency is reached for  $\mu = 100\%$  (see Fig. 1): the diffuse wavefield approximation becomes valid [5]. In this spectral domain, Skudrzyk's mean-value method [4,8] identifies a structure by its *characteristic*

\* Corresponding author.

E-mail addresses: [kerem.ege@polytechnique.edu](mailto:kerem.ege@polytechnique.edu), [kerem.ege@lms.polytechnique.fr](mailto:kerem.ege@lms.polytechnique.fr) (K. Ege), [boutillon@lms.polytechnique.fr](mailto:boutillon@lms.polytechnique.fr) (X. Boutillon), [bertrand.david@enst.fr](mailto:bertrand.david@enst.fr) (B. David).

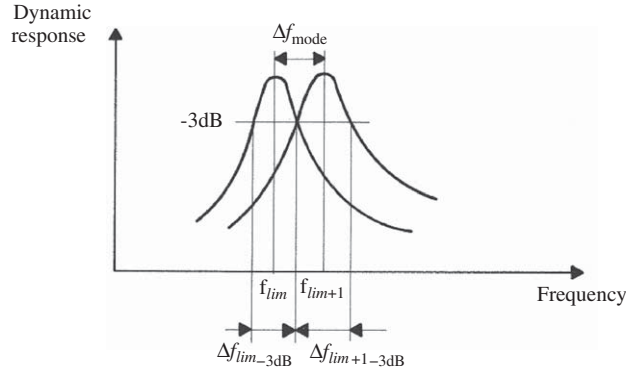


Fig. 1. Scheme of individual modal resonances with the same amplitude and a modal overlap factor of 100% (after Ref. [5]).

*admittance*, which is equivalent to the admittance of an infinitely extended structure. Adding other hypotheses, it is possible to apply statistical methods such as the Statistical Energy Analysis (SEA) [6], which seeks to calculate the spatial average of the response of each component of a structure by considering the equilibrium of power flows. Besides the diffuse wavefield of each subsystem, the assumptions required by SEA are that the system represents a reverberant field, that the input power sources are uncorrelated, and that the subsystems are weakly coupled [9,10].

In the hope of filling the gap between the low- and the high-frequency domains ( $30\% \leq \mu \leq 100\%$ ), or in effect, extending the low-frequency domain, a technique based on the high-resolution analysis algorithm ESPRIT [11] and the order-detection method ESTER (ESTimation Error) [12] is described here. Three examples of application are presented: the separation of twin modes of a square plate (local modal overlap  $\mu = 200\%$ ) and two partial modal analyses of aluminium plates up to a modal overlap  $\mu = 70\%$ .

In this article, modal analysis is restricted to linear systems; therefore, the impulse response  $\xi(\mathbf{x}, t)$  at any point located in  $\mathbf{x}$  is expected to be a sum of complex exponentials (decaying sines):

$$\xi(\mathbf{x}, t) = \Re \left[ \sum_{k=1}^{K/2} a_k(\mathbf{x}) e^{-\alpha_k t} e^{2\pi i f_k t + j\varphi_k(\mathbf{x})} \right] \quad (1)$$

where  $K/2$  is the number of modes,  $f_k$  are the modal frequencies (in Hz),  $\alpha_k$  the modal damping factors (in  $s^{-1}$ ),  $a_k(\mathbf{x})$  and  $\varphi_k(\mathbf{x})$  the modal amplitudes and phases at the point of interest.

The free dynamics of the generalised modal displacement  $q_k$  is ruled by the following differential equation:

$$m_k \ddot{q}_k + c_k \dot{q}_k + m_k \omega_k^2 q_k = 0 \quad (2)$$

where  $m_k$  is the modal mass (in kg),  $c_k$  the modal damping coefficient (in  $kg s^{-1}$ ) and  $\omega_k$  the modal angular frequency (in  $rad s^{-1}$ ).

The modal damping factor  $\alpha_k$  (also called modal decay constant in  $s^{-1}$ ), the modal decay time  $\tau_k$  (in s), the modal loss factor  $\eta_k$  (dimensionless) and the modal damping ratio  $\zeta_k$  (dimensionless) are related between them and to the above physical quantities as follows:

$$\alpha_k = \frac{1}{\tau_k} = \frac{\eta_k \omega_k}{2}, \quad \eta_k = 2\zeta_k = \frac{\Delta\omega_{k,-3dB}}{\omega_k}, \quad \zeta_k = \frac{c_k}{2m_k \omega_k} \quad (3)$$

If  $\Delta f_{-3dB}$  is the same for two successive modes around  $f$ , the modal overlap  $\mu$  becomes

$$\mu(f) = \frac{\eta f}{\Delta f_{mode}} = \frac{1}{\Delta f_{mode}} \frac{\alpha}{\pi} \quad (4)$$

In practice, the modal damping factor  $\alpha$  and the modal local density  $1/\Delta f_{mode}$  are estimated in average over a narrow frequency-band centred on  $f$ .

Measured signals always contain some noise  $\beta(t)$ , which we suppose to be additive. After discretisation of  $\xi(\mathbf{x}, t)$  at the sampling rate  $F_s = T_s^{-1}$ , the signal model of the free response of the system becomes

$$\xi_i(\mathbf{x}) = \Re \left[ \sum_{k=1}^{K/2} a_k(\mathbf{x}) e^{-\alpha_k T_s i} e^{2\pi i f_k T_s i + j\varphi_k(\mathbf{x})} + \beta_i \right], \quad i = 1, \dots, N \quad (5)$$

In order to estimate the modal parameters, a high-resolution method is applied to the complex signal associated to  $\xi_i(\mathbf{x})$ . Historically, the Prony [13] or the Pisarenko [14] methods rely on the resolution of a linear prediction equation. More recent techniques assume that the signal is a sum of complex exponentials added to white noise and project the signal onto two subspaces. The space spanned by a finite-length vector containing successive samples is decomposed into the subspace

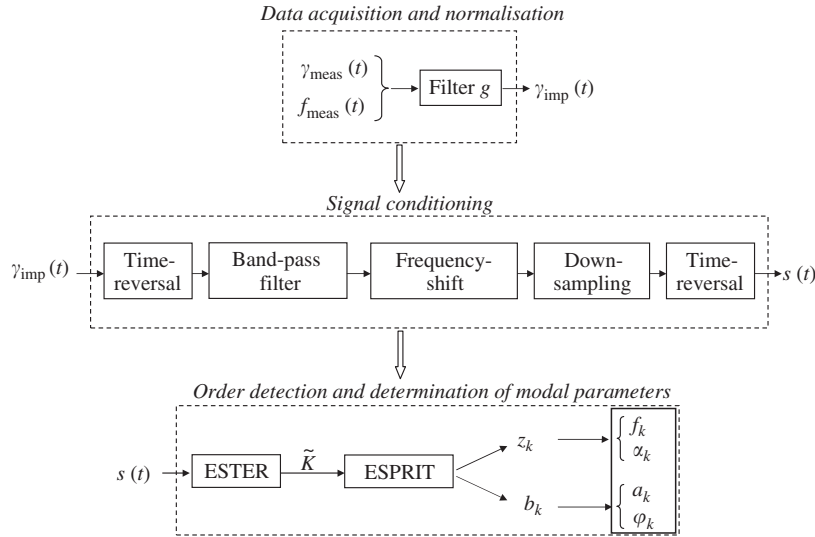


Fig. 2. Block diagram of the high-resolution modal analysis method.

spanned by the sinusoids (*signal subspace*) and its supplementary (*noise subspace*). The MUSIC<sup>1</sup> [15], Matrix Pencil [16], and ESPRIT<sup>2</sup> [11] algorithms are based on this principle. The latter is chosen here since it takes into account the rotational invariance property of the signal subspace, ensuring a more precise and robust estimation.

In practice, the noise deviates from white noise and noise-whitening may prove necessary prior to analysis. A second conditioning step described by Laroche [17] consists in splitting signals into several frequency-bands: this reduces the number of (sub-)signal components to be estimated by ESPRIT within reasonable limits and is achieved by filtering the impulse response. When narrow subbands are chosen, noise-whitening usually becomes unnecessary. The next conditioning steps aim at reducing the length of each subband signal in order to keep the memory allocation low enough and the algorithm tractable in practice: each subband signal is frequency-shifted toward zero and down-sampled. The down-sampling factor is adjusted as to avoid aliasing.

In ESPRIT, the dimensions of both subspaces must be chosen *a priori* and the quality of the estimation depends on a proper choice for these parameters. The best choice for the dimension of the modal subspace is the number of complex exponentials in the signal. This number is  $K$ , twice the number of decaying sinusoids. It is therefore advisable to estimate this number prior to the analysis. This is done by means of the recently published ESTER technique [12].

The block diagram in (Fig. 2) describes the three main steps of the method:

- reconstruction of the acceleration impulse response (Section 2.1);
- signal conditioning (Section 2.2);
- order detection and determination of modal parameters, which constitute the heart of the method (Section 2.3).

## 2. Data acquisition and signal processing

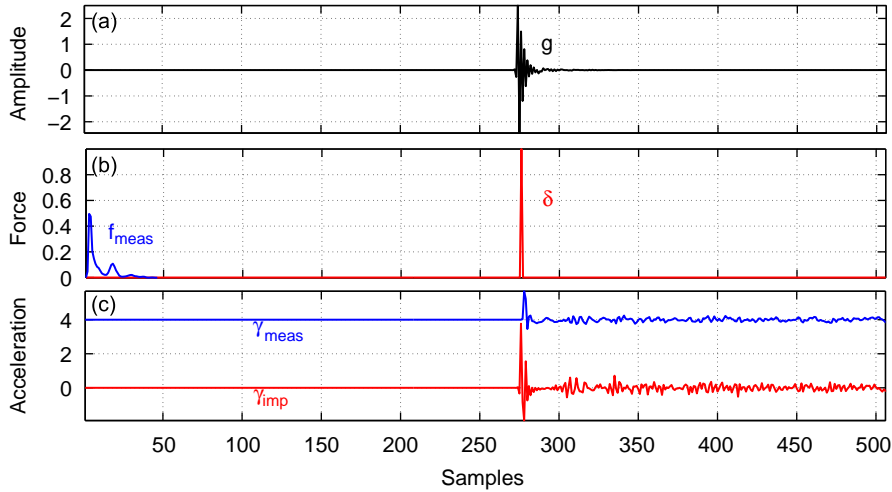
### 2.1. Reconstruction of the acceleration impulse response

A standard measuring technique in modal analysis consists in applying a pseudo-impulse force with an impact hammer on a structure and to measure both the applied force and the resulting vibration, generally by means of an accelerometer. Taking advantage of the assumed linearity of the system, the reciprocity theorem is invoked in order to obtain the modal shapes: the point of excitation is varied while the accelerometer is kept fixed, instead of the opposite. This experimental procedure has been followed throughout this article.

The analysis of free vibrations becomes a modal analysis when the response is normalised to the excitation of the system. The usual technique for this purpose is the division of the Fourier spectrum of the response by that of the excitation. In principle, the result is the Fourier transform of the impulse response of the system at the point of interest. Since our method works in the time-domain, it would be necessary to calculate the inverse Fourier transform of this

<sup>1</sup> Multiple Signal Classification.

<sup>2</sup> Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques.



**Fig. 3.** Reconstruction of one impulse acceleration response (arbitrary units). (a) Optimised filter  $g$ , with  $p = 276$ . (b) Measured force  $f_{\text{meas}}$  ( $m = 46$ ) and reconstructed pulse  $\delta$  shifted by  $p$  samples. (c) Measured response  $\gamma_{\text{meas}}$  and reconstructed response  $\gamma_{\text{imp}}$ .

response. In practice, the division of spectra proves to be dangerous for the applicability of the method: quasi-zeros in the denominator introduce high-amplitude individual components in the ratio; they may then be transformed into quasi-sinusoids by the inverse Fourier transform and appear as false modal components. In our case, the normalisation has been achieved by reconstructing the impulse response by means of an inverse-filtering technique applied to the response of the system.

The displacement  $q$  of a linear mechanical system is

$$q = q_{\text{imp}} * f \quad (6)$$

where  $q_{\text{imp}}$  is the impulse response. The system will be considered initially at rest ( $v(0^-) = 0$ ) in a frame of reference such that  $q(\mathbf{x}, 0^-) = q(\mathbf{x}, 0^+) = 0$  at any position  $\mathbf{x}$ . Without loss of generality, one may also consider  $q_{\text{imp}}(0^+) = 0$ . It should be noted that  $v_{\text{imp}}(0^+)$  and  $v(0^+)$  are not zero in general.

Denoting Laplace transforms by uppercase letters, the generic expression  $\mathcal{L}[df/dt] = u\mathcal{L}(f) - f(0^+)$  of the Laplace transform of the time-derivative of a function yields

$$V = uQ_{\text{imp}} \cdot F = \mathcal{L}(v_{\text{imp}})\mathcal{L}(f) \Rightarrow v = v_{\text{imp}} * f$$

The impulse acceleration response is given by

$$\begin{aligned} \Gamma &= uV_{\text{imp}} \cdot F - v(0^+) \\ &= [\mathcal{L}(\gamma_{\text{imp}}) + v_{\text{imp}}(0^+)]F - v(0^+) \\ &= \mathcal{L}(\gamma_{\text{imp}})\mathcal{L}(f) + v_{\text{imp}}(0^+)\mathcal{L}(f) - v(0^+) \\ &\Rightarrow \gamma = \{\gamma_{\text{imp}} * f\} + v_{\text{imp}}(0^+)f - v(0^+)\delta \end{aligned} \quad (7)$$

Given the measurements of the force  $f_{\text{meas}}$  and the acceleration  $\gamma_{\text{meas}}$ , the impulse response  $\gamma_{\text{imp}}$  is estimated as follows. The first step consists in finding a finite-impulse-response (FIR) filter  $g$  that transforms the force signal  $f_{\text{meas}}$  into a normalised pulse (Fig. 3)

$$f_{\text{meas}} * g = \delta_{\vec{p}} \quad (8)$$

Here,  $g$  stands for the impulse response of the filter in the continuous time-domain and  $\delta_{\vec{p}}$  represents the Dirac impulse shifted in time for causality reasons:  $\delta_{\vec{p}} = \delta(t - p/F_s)$ .

When a hammer is used to excite the system, the excitation duration is finite and an upper bound for the number  $m$  of samples in  $f_{\text{meas}}$  can be given with certainty. After discretisation, the convolution equation Eq. (8) defines a system of linear equations. The best solution, for example in the least-mean-square sense, can be found by commonly available algorithms. We have chosen a filter with  $11m + 1$  coefficients and  $p = 6m$ .

In a second step, Eq. (7) is applied to the measured values of the acceleration  $\gamma = \gamma_{\text{meas}}(t)$  and the force  $f = f_{\text{meas}}(t)$ . After convolution of Eq. (7) by  $g$  and substitution of  $f_{\text{meas}}(t) * g$  by  $\delta_{\vec{p}}$ , the result is shifted up in time by  $pT_s$ . One obtains an estimation of the impulse acceleration response  $\gamma_{\text{imp}}$

$$\gamma_{\text{imp}} = \{\gamma_{\text{meas}} * g\}_{\vec{p}} - v_{\text{imp}}(0^+)\delta + v(0^+)g_{\vec{p}} \quad (9)$$



When the system is excited by a continuous force (no shock),  $v(0^+)$  is 0 and the above expression becomes simpler. Otherwise,  $v(0^+)$  can be estimated by integrating  $\gamma(t)$ . In practice, it may be difficult to extract the signal from the noise in  $\gamma_{\text{meas}}$  and obtaining a precise value of  $v(0^+)$  may turn difficult. The solution consists in defining the origin of time slightly before the impact hammer touches the structure (this is generally obvious by inspection); this guarantees that  $\gamma(T_s)$  and  $v(0^+)$  are truly 0.

The process of retrieving the acceleration impulse response is illustrated in Fig. 3. The first sample of the impulse response cannot be retrieved since  $v_{\text{imp}}(0^+)$  is not known. If necessary, it could be reconstituted at the end of the modal analysis and the corresponding correction be applied to the modal amplitudes and phases.

## 2.2. Signal conditioning

### 2.2.1. Reduction of the number of points

The number of operations in the ESPRIT algorithm is  $O(N^3)$  and the computing duration is excessively long for a large number  $N$  of samples. Numerical instabilities may also appear. In order to overcome these problems, we adopt the procedure proposed by Laroche [17] and reviewed in the introduction: band-filtering, frequency-shifting, and decimating. A few minor transformations are introduced.

It is advisable to evaluate roughly the spectral density of modes.<sup>3</sup> This helps to define frequency-bands that contain less than say  $\tilde{K} = 25$  complex components [18]. A band-pass filter between  $f_l$  and  $f_h$  is designed for each band. Although not as efficient as IIR filters, FIR filters are preferred because their transfer function has no pole and therefore, does not introduce spurious modes into the signal. Various techniques for synthesising the filter are available. We have chosen the Blackman window.

The signal is then filtered as follows. An impulse response encounters a large variation at  $t = 0$  and decreases afterwards. In order to minimise the effect of the transient response of the filter, the signal is time-reversed prior to convolution with the FIR  $h$  of the filter. This does not alter its spectrum. Convolution adds a number of samples equal to the length of  $h$ , at the end of the reversed signal. These points must be removed from the *beginning* of the signal after it is time-reversed again (see below). Once filtered, only  $\tilde{K}/2$  modes are kept. However this number is still to be determined with precision. The amplitudes and phases of the modes at the measured point are altered by the filtering and their transformed values are written  $\tilde{a}_k$  and  $\tilde{\phi}_k$ .

The Hilbert transform of the filtered signal is computed in order to eliminate the negative-frequency content of the spectrum which would cause aliasing problems in the next steps of the procedure. We have used the Hilbert function proposed by Matlab<sup>®</sup>. The procedure does not include any spectrum division; the Gibbs phenomenon (very rapid oscillations) associated to the Fourier truncation done in this procedure is limited to the very beginning and to the very end of the transformed signal. Because of a very fast decay rate, it never proved problematic in practice (in other words: no pseudo-poles were added by the Fourier truncation). The signal now contains  $\tilde{K}/2$  complex exponentials whose frequencies are between  $f_l$  and  $f_h$ .

This signal is multiplied by  $\exp(-2\pi j f_d i T_s)$ , with  $i = 1, \dots, N$ . This operation shifts the spectrum by  $f_d$  which is chosen slightly less than  $f_l$ . The spectrum of the result is now limited by  $f'_l = f_l - f_d$  and  $f'_h = f_h - f_d$ . As a matter of preference, we have then taken the real part of this complex signal. This produces a symmetrical spectrum with  $\tilde{K}$  components between  $-f'_h$  and  $+f'_h$ .

According to the sampling theorem, the signal may now be down-sampled at a sampling frequency lower than  $F_s$ , reducing the number of points to analyse. In principle, the decimating factor  $d$  could be chosen up to  $F_s/2f'_h$ ; in practice, a safety margin is kept and the decimating factor that we have used was approximately  $F_s/6f'_h$ . Requirements on the minimum number of points in the signal add other constraints on the decimating factor (see below).

After decimation, time-reversing, and the removal of extra points (see above), the signal takes the form

$$s_i = x_i + \beta_i = \sum_{k=1}^{\tilde{K}} b_k z_k^i + \beta_i, \quad i = 1, \dots, \tilde{N} = \frac{N}{d} \quad (10)$$

where  $x_i$  is the modal signal (to be determined),  $z_k = e^{-\tilde{\alpha}_k T_s d + 2\pi j \tilde{f}_k T_s d}$  are its so-called poles ( $\tilde{f}_k = f_k - f_d$ ,  $\tilde{\alpha}_k = \alpha_k$ ),  $b_k = \tilde{a}_k e^{j\tilde{\phi}_k}$  are the complex amplitudes, and  $\tilde{K}$  is the number of complex exponentials to be found. ESPRIT requires that the number  $\tilde{N}$  of signal points be more than  $2\tilde{K}$ .

### 2.2.2. Noise whitening

In principle, the results of the ESPRIT analysis correspond to the complex frequencies of the signal only if the additive noise  $\beta$  is white. In practical cases, the noise is white to first order in any narrow band, hence the interest of subband filtering presented above. For wide frequency-bands, including a noise-whitening step in the signal-conditioning procedure may improve the precision of the modal results. A method proposed by Badeau [18] consists in estimating the power spectral density of the noise for each frequency-band and to deduce from it the corresponding whitening filter. The Fourier

<sup>3</sup> This may be done by mechanical reasoning or by extrapolating the low-frequency analysis, for example.



spectrum is computed first and a *rank filter*<sup>4</sup> is used in order to smooth the spectrum. Then, the estimator of the autocovariance function is found by calculating the inverse Fourier transform of this filtered spectrum. A linear prediction on this estimator gives the coefficients of the whitening filter that can, finally, be applied to the original signal.

This noise-whitening treatment did not prove necessary in the applications presented here.

### 2.3. Determination of modal parameters

#### 2.3.1. Order detection

As mentioned above, the best choice for the dimension of the modal subspace to be given to the ESPRIT algorithm is  $\tilde{K}$ . Obviously, a larger value may also be chosen: some of the effective noise will be partly projected on to modal subspace, producing very weak or highly attenuated components. A choice smaller than  $\tilde{K}$  for the dimension of the modal subspace would introduce errors in the estimation of the modal components.

In order to estimate the number of complex exponentials (that is: twice the number of modes) in the signal, we have used the ESTER procedure by Badeau [12] which is schematically presented here. One notes that the first steps of this procedure are common with those of the ESPRIT algorithm [11].

The  $\tilde{N}$  signal data  $s_i$  and the modal signal samples  $x_i$  are written in the form of Hankel matrices

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_l \\ \vdots & & & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{\tilde{N}} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_l \\ \vdots & & & \vdots \\ x_n & x_{n+1} & \cdots & x_{\tilde{N}} \end{pmatrix} \quad (11)$$

with  $l = \tilde{N} - n + 1$ ,  $n$  being the sum of the dimensions of the signal and noise subspaces.

It has been shown (see e.g. Refs. [17,18]) that:

- the estimation is optimal when  $n = \tilde{N}/3$  or  $2\tilde{N}/3$ ,
- the estimation quality is rapidly degrading outside this interval,
- the estimation is only slightly degraded for  $n \in [\tilde{N}/3, 2\tilde{N}/3]$ .

In consequence, we have systematically chosen  $n = \tilde{N}/2$ .

The correlation matrices are formed (computed in the case of  $R_{ss}$ )

$$R_{ss} = \frac{1}{l} S S^H, \quad R_{xx} = \frac{1}{l} X X^H \quad (12)$$

For additive white noise with variance  $\sigma^2$

$$\mathbb{E}[R_{ss}] = R_{xx} + \sigma^2 I \quad (13)$$

which shows that the eigenvectors of  $R_{xx}$  are among those of  $R_{ss}$  in the limit of perfect estimation.

The algorithm ESPRIT needs the  $\tilde{K}$  eigenvectors of  $R_{xx}$  to determine the poles  $\{z_k\}$ . It is now shown how to find both  $\tilde{K}$  and those eigenvectors.

The eigenvalues  $\lambda_m$  ( $m = 1, \dots, n$ ) and the corresponding eigenvectors  $\{w_1, \dots, w_n\}$  of  $R_{ss}$  are computed. It can be shown [11] that

- the eigenvalues are real and positive,
- eigenvalues associated with the noise subspace are equal to  $\sigma^2$  (nearly equal for a non-white noise).

Ordering the eigenvalues in decreasing order naturally selects the ones associated with the modal signal: in principle,  $\tilde{K}$  is the number of eigenvalues that verify  $\lambda_m > \sigma^2$  (see Eq. (13)). The ESTER criterion presented below is more robust than this condition for the determination of  $\tilde{K}$ .

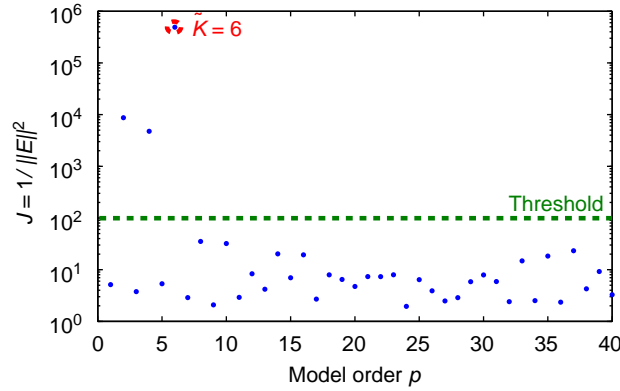
$W(p)$  is defined as the matrix formed by columns  $w_k$ :  $\{w_1, \dots, w_p\}$  with  $p < n$ . The matrix  $W_{\uparrow}(p)$  is defined by removing the first line of  $W(p)$  and  $W_{\downarrow}(p)$  is defined by removing the last line of  $W(p)$ . The following matrix  $\Phi$  and quantity  $E(p)$  are formed:

$$\Phi(p) = W_{\downarrow}(p)^{\dagger} W_{\uparrow}(p), \quad E(p) = W_{\uparrow}(p) - W_{\downarrow}(p)\Phi(p) \quad (14)$$

where  $W^{\dagger}$  is the pseudo-inverse of  $W$ .

The ESTER criterion defines  $\tilde{K}$  as the highest  $p$  maximising  $J(p) = 1/||E(p)||^2$ . In other words,  $\tilde{K}$  is found as the highest number such that  $E(\tilde{K})$  approaches 0, which corresponds to the so-called rotation invariance of  $W$ .

<sup>4</sup> In a rank filter, the data are sorted by ascending orders. The output value is the  $r$ th lowest data value, where  $r$  is the rank order of the filter.



**Fig. 4.** Application of the ESTER criterion to a signal made of three damped sinusoids and additive noise ( $SNR = 50$  dB, see Table 1 for the other parameters). The detection threshold for ESTER is chosen to 100. The value  $\tilde{K} = 6$  (corresponding to three modes) is clearly detected.

**Table 1**

Comparison between true and estimated parameters of a synthetic signal.

	Parameters of the test signal			Parameters estimated by ESPRIT		
$f_k$ (Hz)	2078.10	2082.30	2087.10	2078.11	2082.31	2087.12
$\alpha_k$ ( $s^{-1}$ )	28.00	31.00	27.00	27.96	30.72	27.02
$a_k$	1.00	0.80	0.40	1.00	0.77	0.40
$\phi_k$ (rad)	$\frac{\pi}{2}$ ( $\approx 1.57$ )	$-\frac{\pi}{3}$ ( $\approx -1.05$ )	$-\frac{\pi}{6}$ ( $\approx -0.52$ )	1.56	$-1.05$	$-0.54$

The case of a synthesised signal with three sinusoids and added noise (signal-to-noise ratio  $SNR = 50$  dB) is shown in Fig. 4 (see Table 1 for the modal components parameters). A threshold  $J_t$  is chosen (here:  $10^2$ ), in correspondence with  $SNR$  and  $\tilde{K}$  is considered as the highest value of  $p$  for which  $J(p) > J_t$  (here:  $p = 6$ ). This criterion proves to be very robust.

### 2.3.2. Modal frequencies, modal damping factors, and complex amplitudes

Once the number of modes  $\tilde{K}/2$  has been estimated, the  $\tilde{K}$  first columns of  $W(n)$  are extracted to form  $W = W(\tilde{K})$ , the matrix of the eigenvectors of  $R_{xx}$ . The purpose of the ESPRIT procedure is to derive the so-called poles  $z_k$  from this information on the modal signal. The main steps are schematically recalled here (for a demonstration, see Ref. [11]):

- The Vandermonde matrix  $V^n$  and the diagonal matrix  $D$  are formed with the  $z_k$

$$V^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_{\tilde{K}} \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_{\tilde{K}}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \dots & z_{\tilde{K}}^{n-1} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} z_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & z_{\tilde{K}} \end{pmatrix}$$

Their rank is  $\tilde{K}$  and they verify

$$V_{\uparrow}^n = V_{\downarrow}^n D \quad (15)$$

where the matrix  $V_{\uparrow}^n$  (respectively,  $V_{\downarrow}^n$ ) are formed by eliminating the first row (respectively, the last row) of  $V^n$ .

- The rank of  $W$  is also  $\tilde{K}$  and therefore, a base-change matrix  $C$  can be defined by

$$V^n = WC \quad (16)$$

Shifting this equation up and down yields  $V_{\downarrow}^n = W_{\downarrow} C$  and  $W_{\uparrow} = V_{\uparrow}^n C^{-1}$

- Using Eq. (15) yields

$$W_{\uparrow} = W_{\downarrow} CDC^{-1} \Rightarrow W_{\downarrow}^{\dagger} W_{\uparrow} = CDC^{-1} \quad (17)$$

This equation, denoting a so-called rotation invariance property of  $W$ , shows that the poles  $z_k$  are the eigenvalues of  $W_{\downarrow}^{\dagger} W_{\uparrow}$ .

The frequencies and damping factors of the response signal are

$$f_k = \frac{\arg(z_k) F_s}{2\pi d} + f_d, \quad \alpha_k = -\frac{F_s}{d} \ln |z_k| \quad (18)$$

The final step consists in the determination of the amplitudes and phases of the modal components. To this end, the  $\tilde{N} \times \tilde{K}$  Vandermonde matrix  $V^{\tilde{N}}$  is formed. The complex amplitudes  $b_k$  are the best solution, in the least-mean-square sense, of the equation

$$V^{\tilde{N}} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{\tilde{K}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_{\tilde{N}} \end{bmatrix} \quad (19)$$

The amplitudes and phases of the response are

$$a_k = \frac{|b_k|}{|H(f_k)|} \quad (20)$$

$$\varphi_k = \arg(b_k) - \arg[H(f_k)] \quad (21)$$

Table 1 shows the estimated results for the synthetic signal described above. The error is generally less than 1% (4% for the phase of the third component and amplitude of the second component).

### 3. Applications

Partial modal analyses are shown in three cases:

- a square aluminium plate (A) with localised damping: twin modes with  $\mu \simeq 200\%$ ,
- a rectangular aluminium plate (B) in the mid-frequency domain ( $30\% \leq \mu \leq 50\%$ ),
- a rectangular aluminium plate (C) in the mid-frequency domain ( $45\% \leq \mu \leq 70\%$ ).

#### 3.1. Experiments

A pseudo-impulse force is applied by means of an impact hammer (P.C.B. Piezotronics 086D80). The acceleration is measured with an accelerometer (Brüel & Kjær - ENDEVCO, Isotron 2250A-10). In all cases, boundary conditions are kept as close as possible to “free–free”. The point of excitation is varied (see Section 2.1) whereas the vibration measurements are made at a single point, in the vicinity of a corner of the plate. Under the chosen boundary conditions, this location is not on any of the nodal lines.

The signal analysis described in the previous sections is applied independently to each pair of measurements  $\{f_{\text{meas}}, \gamma_{\text{meas}}\}$ . The frequency and the damping factor of each mode is taken as the weighted mean of all the estimated values. Weights are the estimations of the amplitude at each point: this gives less importance to the less precise estimations in the nodal regions.

The masses of the plates (A), (B), and (C) are respectively, 0.48, 5.5, and 22.5 kg. Despite its relatively low mass (0.4 g), the accelerometer causes a slightly negative shift of the modal frequencies. This phenomenon was evaluated quantitatively on plate (A) by placing a second accelerometer with the same mass just opposite to the first one. A frequency drift of  $-0.7$  Hz was observed for the (2,1)-mode and of  $-0.3$  Hz for the (1,2)-mode, both at approximately 180 Hz (see Section 3.3). To first order, the mass loading effect of one accelerometer can be corrected by adding the measured drift to the modal frequencies measured in the situation with one accelerometer only. For plate (B) (5.5 kg), a negative drift of less than 0.1 Hz was observed for the modes of interest, around 600 Hz. For the heaviest plate (C) (22.5 kg) a negative drift of about 0.1 Hz was observed around 1600 Hz, close to the uncertainty of our method for these high frequencies (see Section 3.5).

#### 3.2. Theoretical modal determination

Only approximate solutions are known for the frequencies and the shapes of the conservative modes of a thin isotropic rectangular plate with free–free boundary conditions. Warburton [19] combined a Rayleigh method with characteristic beam functions to obtain a simple approximate expression. In this approach, plate modes are assumed to be the product of beam functions

$$W_{(m,n)}(x,y) = X_m(x)Y_n(y) \quad (22)$$

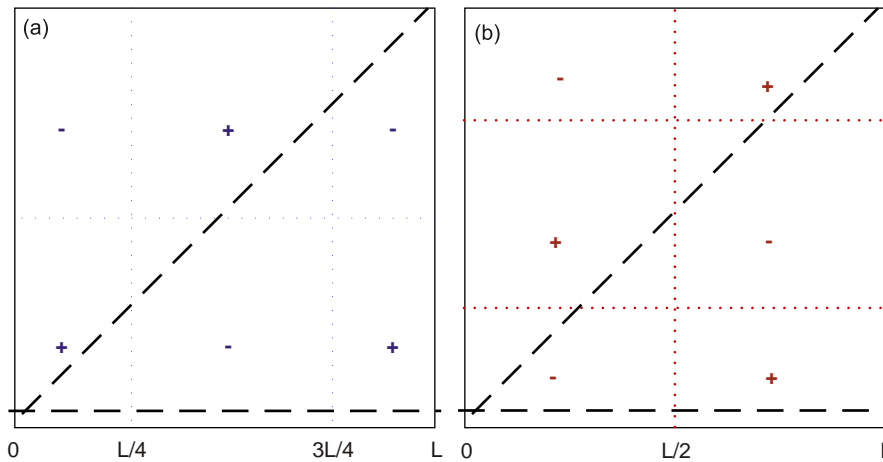
where  $x$  (respectively,  $y$ ) corresponds to the shorter length (respectively, longer) of the plate and  $X_m$  (respectively,  $Y_n$ ) is the  $m$  (respectively,  $n$ )-th normal mode of a beam with the same boundary conditions as the corresponding edges of the plate. The frequency accuracy is excellent for plates with constrained edges but it is less so when one or more edges are left free. Kim and Dickinson [20] provide an improved approximate expression by using the Rayleigh method in connection with the

minimum potential energy theorem: the deflection  $W_{m,n}(x,y)$  includes three terms (see Appendix A). For comparison with experiments, we have retained this method since the errors on modal frequencies are known to be less than 1% [21] with tractable frequency expressions. In our experiments, the uncertainties and approximations are such (see below) that more precise methods (Rayleigh–Ritz method, superposition, exact series solutions, finite-element analysis, see Hurlebaus [21] for an exhaustive comparison) are not necessary.

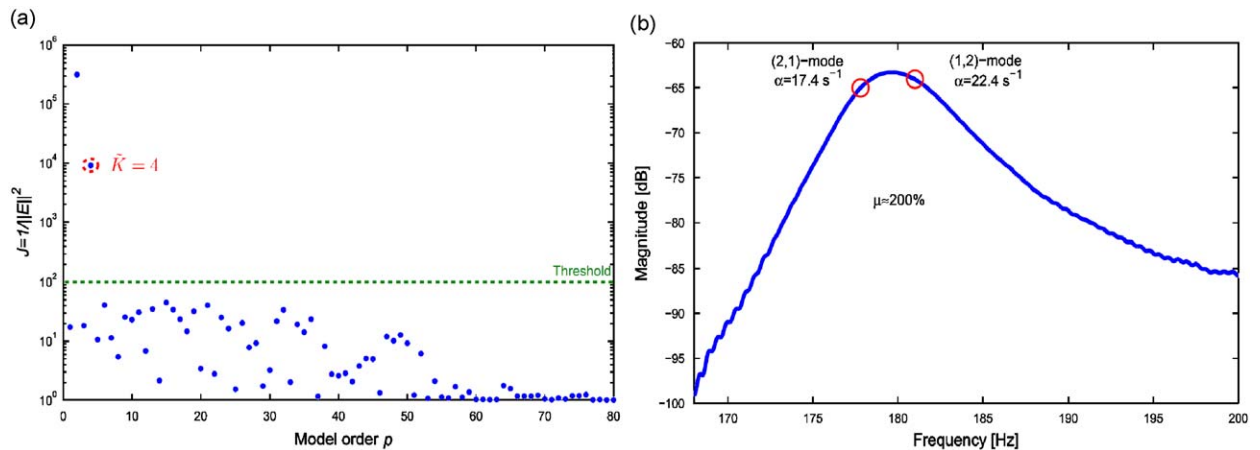
### 3.3. Separation of the twin modes of a square plate (A): low-frequency and high or low modal overlap

An aluminium square plate (AU4G,  $300 \times 300 \times 1.9 \text{ mm}^3$ ) is suspended by rubber bands. A block of foam is glued in the centre in order to increase damping. In principle, modes (2, 1) and (1, 2) have the same modal frequency (twin modes), and their modal shapes are similar under a  $90^\circ$  rotation (Fig. 5). In practice, modal frequencies and dampings are slightly different due to imperfections in symmetry and isotropy. Here, the modal frequencies of the two modes are  $\approx 178$  and  $\approx 181 \text{ Hz}$ , corresponding to a local (apparent) modal density of  $\approx 3 \text{ modes Hz}^{-1}$ .

The analysis is done along one side ( $y = 0$ ) and along one diagonal as shown in Fig. 5. Plate vibrations are damped by means of a block of foam glued in the centre. The modal damping factors  $\alpha$  are  $\approx 20 \text{ s}^{-1}$ , corresponding to a modal overlap of  $\approx 200\%$ . The ESTER procedure reveals two modes in the 170–200 Hz frequency-band, as shown in Fig. 6(a). They are undistinguishable in a typical Fourier spectrum (Fig. 6(b)). The estimations of the modal parameters are given in Table 2.



**Fig. 5.** Twin modes of a square plate ( $L = 300 \text{ mm}$ ): (a) (2,1)-mode; (b) (1,2)-mode. Dotted lines: nodal lines. Dashed lines: denote where modal analyses are performed.

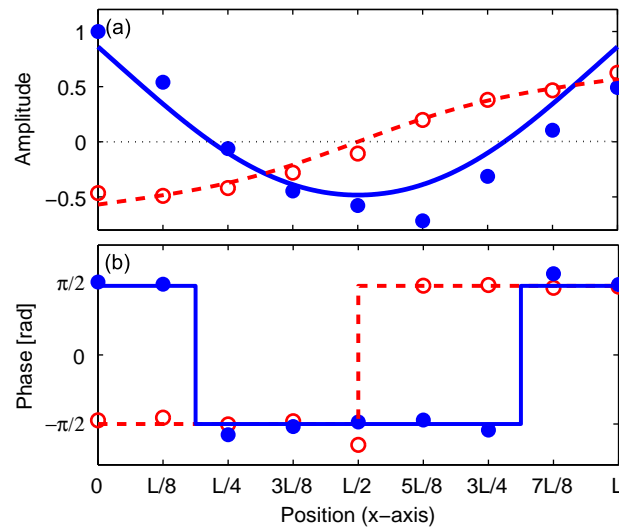
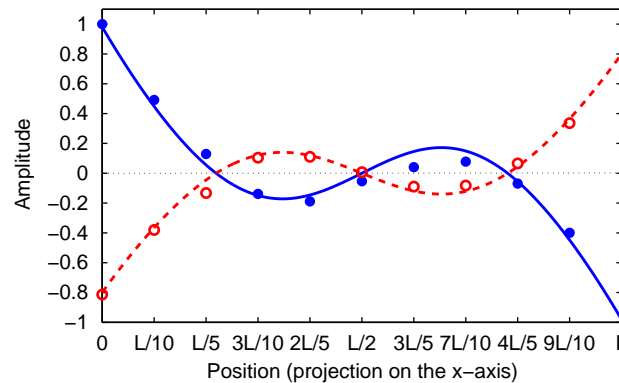


**Fig. 6.** Analysis of the first twin modes of square plate (A). (a) ESTER criterion on the response signal in point 9: the value  $\hat{K} = 4$  (two modes) is detected. (b) Amplitude of the Fourier spectrum at the same point. The length of the “useful” signal is  $\approx 2 \text{ s}$  (it is masked by noise afterwards) and increasing amounts of zero-padding were tried: beyond a total length of 20 s for the analysis window (as retained here), the spectrum does not change appreciably. ○ marks: modes estimated by ESPRIT.

**Table 2**

Plate (A), with and without artificial extra damping: estimations of the modal parameters of the twin modes (2, 1) and (1, 2).

		(2,1)-mode	(1,2)-mode
Plate with extra damping	$f$ (Hz)	177.8	181.0
	$\alpha$ ( $s^{-1}$ )	17.4	22.4
Plate without extra damping	$f$ (Hz)	178.1	181.4
	$\alpha$ ( $s^{-1}$ )	2.6	3.9

**Fig. 7.** Separation of the twin modes along one side of square plate (A). (a) Normalised “signed” amplitudes; (b) phase. ● marks: *measured* (2,1)-mode. Solid line: *theoretical conservative* (2,1)-mode. ○ marks: *measured* (1,2)-mode. Dashed line: *theoretical conservative* (1,2)-mode.**Fig. 8.** Separation of the twin modes along one diagonal of plate: normalised “signed” amplitudes. ● marks: *measured* (2,1)-mode. Solid line: *theoretical conservative* (2,1)-mode. ○ marks: *measured* (1,2)-mode. Dashed line: *theoretical conservative* (1,2)-mode.

With the sign of the modal phase attributed to the amplitude, the modal “signed amplitudes” along one side are displayed in Fig. 7(a) together with the theoretical modal amplitudes for the conservative case (dashed line). Here and in what follows, the measured modal shapes are normalised to a maximum of 1. The amplitudes of theoretical modal shapes are adjusted to yield a best fit (in the least-mean-square sense) to the experimental data. The modal phases are given in Fig. 7(b). The modes can be considered as clearly and adequately separated in this case of very high local modal overlap. The differences between measured and theoretical amplitude curves of the (2,1)-mode (particularly noticeable for  $x > L/2$ ) are due to the mass of the accelerometer placed at  $x = L, y = 0$ . The light mass (0.4 g) slightly modifies the modal shapes. We observed that adding one similar accelerometer at ( $x = L, y = 0$ ) removes the asymmetry of the measured modal shape.

Without the block of foam, damping factors are around  $3 s^{-1}$ , corresponding to an overlap of  $\approx 30\%$ . The estimations of modal parameters are given in Table 2. The “signed amplitudes” along one diagonal are represented in Fig. 8.

### 3.4. Partial modal analysis of a rectangular plate (B): mid-frequency and moderate modal overlap ( $30\% \leq \mu \leq 50\%$ )

The plate (AU4G,  $590 \times 637 \times 5.2 \text{ mm}^3$ ) shown in Fig. 9 is supported by four blocks of foam around the centre in order to ensure high damping; boundary conditions can still be considered as “free-free”.

The measurements are made at 33 regularly spaced points along the long side ( $x = 0$ ). The sampling frequency is 50 kHz. The considered frequency-band is 520–660 Hz; the modal overlap is about 40%. In this mid-frequency region, a typical Fourier spectrum (Fig. 10(b)) does not exhibit well-separated modes. The result of the ESTER procedure is shown in Fig. 10(a), revealing four modes in this frequency-band.

The modal shapes are represented by the “signed amplitudes” in Fig. 11. Mass loading creates no visible asymmetry in modal shapes of plate B (its mass is  $1.4 \times 10^4$  times that of the accelerometer) and the negative shift of modal frequencies is about 0.1 Hz. With help of the theoretical analysis (three-term Rayleigh method), the measured modes can be identified as the (3,3)-, the (2,4)-, the (4,2)-, and (0,5)-modes, ranking 17–20 in the mode series. The estimations of the modal parameters are given in Table 3 together with the corresponding approximate theoretical modal frequencies for Young’s modulus  $E = 7.4 \times 10^{10} \text{ Pa}$ , density  $\rho = 2790 \text{ kg m}^{-3}$ , and Poisson’s ratio  $\nu = 0.33$  as given by the manufacturer. A detailed discussion on the determination of theoretical modal frequencies, their dependency on material properties and plate geometry, and their comparison with experimental values is presented in the next section for plate (C).

### 3.5. Partial modal analyses of a rectangular plate (C): mid-frequency and high modal overlap ( $45\% \leq \mu \leq 70\%$ )

In order to perform modal analysis on high-order modes ( $\approx 200$ ) near the acoustical coincidence frequency, a larger plate was considered (AU4G,  $1000 \times 1619 \times 5 \text{ mm}^3$ ). Modes are analysed on a  $10 \times 10$  mesh with a 1 cm grid-step. Modal frequencies and damping factors are determined as the weighted means of the 100 corresponding estimations.

Two experimental setups were developed in order to ensure free-free boundary conditions for this 22.5 kg plate: suspension by six thick rubber bands glued along one side of the plate and suspension by two nylon lines passing through small holes near the top plate edge. Both are presented in order to illustrate the sensitivity of the method. The experimental values of the modal frequencies are estimated with an accuracy of  $\approx 0.1 \text{ Hz}$  (see Fig. 14 and Table 6) in two narrow frequency-bands (around 1700 and 2100 Hz). Theoretical values are determined as follows.

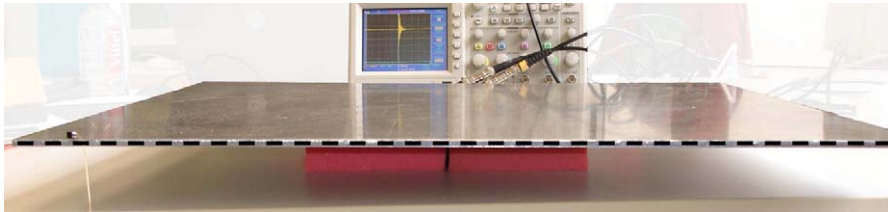


Fig. 9. Plate (B) with the line  $x = 0$  where modal analysis is performed.

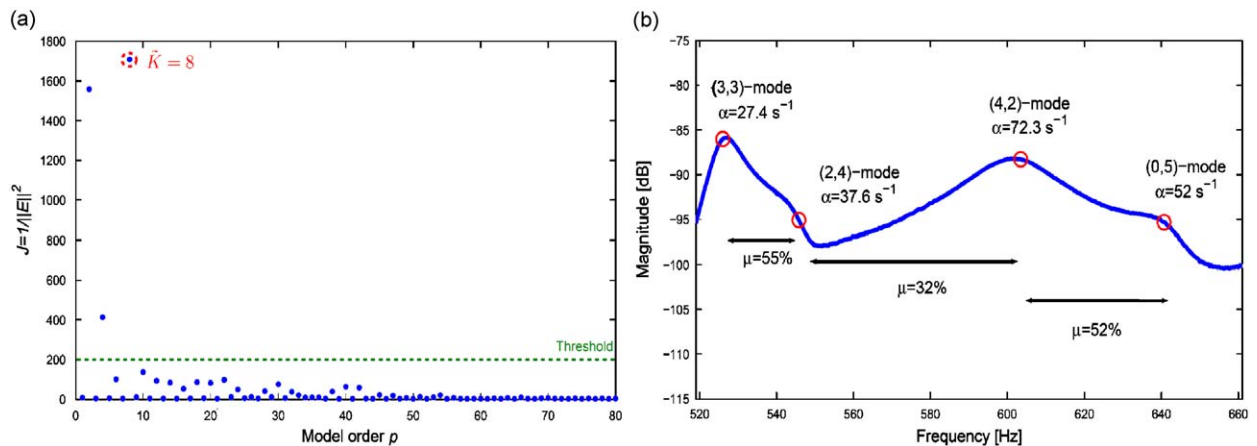
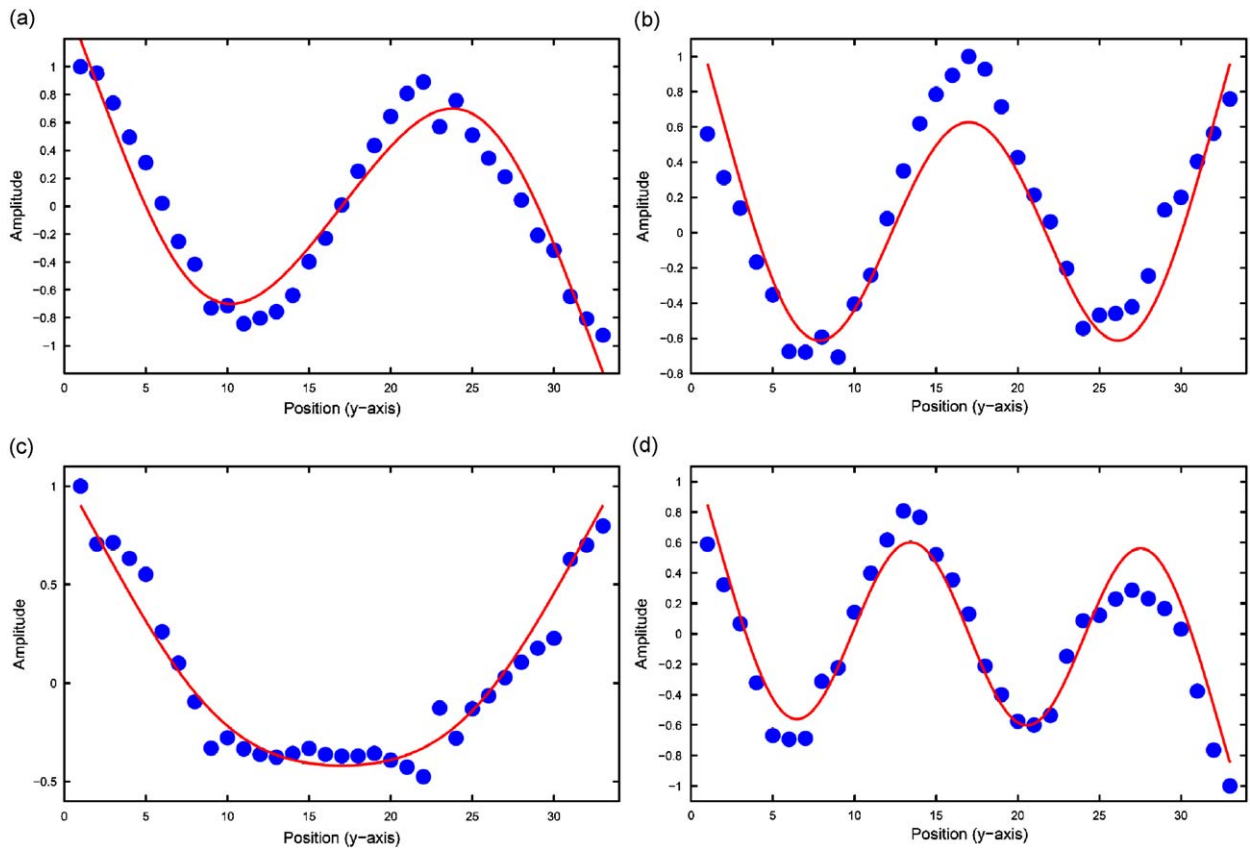


Fig. 10. Plate (B): modal analysis along the long side between 520 and 660 Hz. (a) ESTER criterion on one response signal (point 32): the value  $\tilde{K} = 8$  (four modes) is detected; (b) amplitude of the Fourier spectrum at the same point. The length of the “useful” signal is  $\approx 1.7 \text{ s}$  (it is masked by noise afterwards) and increasing amounts of zero-padding were tried: beyond a total length of 17 s for the analysis window (as retained here), the spectrum does not change appreciably.  $\circ$  marks: modes estimated by ESPRIT.



**Fig. 11.** Plate (B): modal analysis along one side (normalised “signed” amplitudes). • marks: *measured* modes. Solid lines: *theoretical conservative* modes. (a) (3,3)-mode; (b) (2,4)-mode; (c) (4,2)-mode; and (d) (0,5)-mode.

**Table 3**

Plate (B): estimations of the modal parameters between 520 and 660 Hz.

	(3,3)-mode	(2,4)-mode	(4,2)-mode	(0,5)-mode
$f_{\text{RAY}}$ (Hz)	523.7	542.7	587.2	645.7
$f$ (Hz)	526.0	545.8	603.5	640.7
$\alpha$ (s <sup>-1</sup> )	27.4	37.6	72.3	52.0

$f_{\text{RAY}}$ : conservative plate treated by the improved Rayleigh method.  $f$  and  $\alpha$ : experimental determinations.

**Table 4**

Plate (C): comparison between eight modal frequencies estimated by ESPRIT ( $f_{\text{meas}}$ ) and calculated by a finite-element method ( $f_{\text{FEM}}$ ).

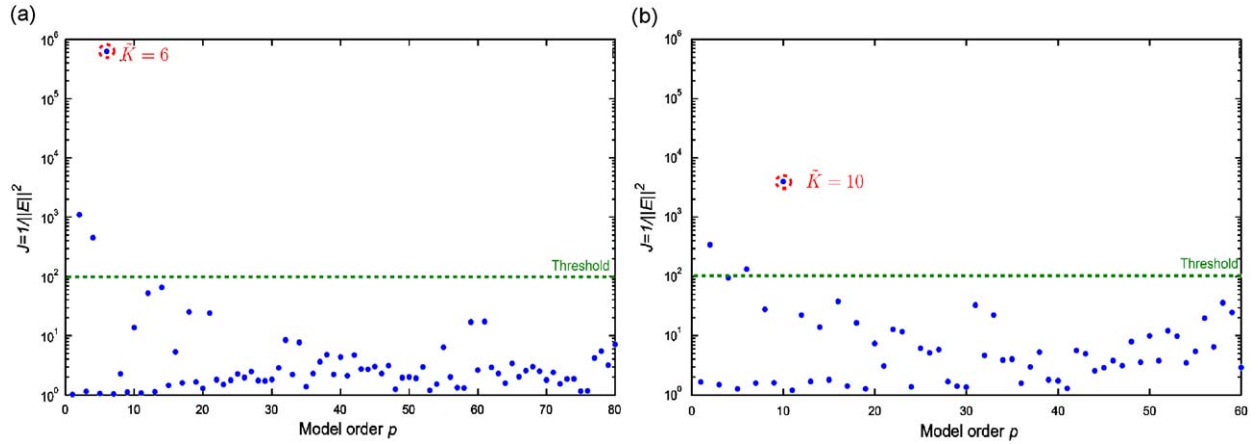
$f_{\text{meas}}$ (Hz)	125.9	139.3	141.1	147.5	150.6	154.7	160.5	171.0
$f_{\text{FEM}}$ (Hz)	125.5	139.2	142.2	149.7	151.2	154.7	159.5	170.9
$\frac{ f_{\text{FEM}} - f_{\text{meas}} }{f_{\text{meas}}} \times 100$	0.30	0.12	0.80	1.49	0.38	0.01	0.62	0.08

In the frame of the Kirchhoff–Love plate theory [22], the modal angular frequencies  $\omega_{m,n}$  are given by

$$\omega_{m,n}^2 = Bk_{m,n}^4 \quad (23)$$

where  $B = Eh^2/12\rho(1 - \nu^2) = D/\rho h$  and  $h$  is the thickness of the plate. The wavenumbers  $k_{m,n}$  are determined by the plate dimensions  $a$  and  $b$  and by the boundary conditions.





**Fig. 12.** ESTER criterion in two frequency-bands (Plate (C)). (a) 1685–1697 Hz frequency-band, point 1: the value  $\tilde{K} = 6$  (three modes) is detected. (b) 2065–2110 Hz frequency-band, point 11: the value  $\tilde{K} = 10$  (five modes) is detected.

Since the physical parameters of the plate are not readily available with the desirable precision, we have estimated the  $B(E, \rho, \nu, h)$  factor by comparing the 18–25th measured modal frequencies to those given by finite-element simulations<sup>5</sup> (Table 4). These particular modes are chosen because they are well-separated and the free-free boundary conditions are well-ensured. Minimising the average of the absolute values of the relative frequency differences between experiments and FEM simulations yields  $B_{\text{FEM}} = 61.0 \text{ m}^4 \text{ s}^{-2}$ . With this estimated value,<sup>6</sup> the average relative difference in this frequency-band is  $\approx 0.47\%$ . Since the finite-element method introduces some spurious stiffness in the simulated system, the numerical value of  $B_{\text{FEM}}$  is certainly slightly overestimated.

The modal frequencies and modal shapes of the high-order modes in the two frequency-bands of interest (around 1700 and 2100 Hz) are calculated with the approximate three-term Rayleigh method, using the values estimated above for the physical parameters. According to Ref. [21], the systematic error for the first modal frequencies calculated by this method is positive and less than  $+1\%$ .

The result of the ESTER procedure for the first frequency-band (1685–1697 Hz,  $\mu \simeq 45\%$ ) is shown in Fig. 12(a) and the corresponding partial modal analysis results are given in Fig. 13 and Table 5. Results for the three modes detected in this frequency-band are reported for both suspension arrangements. Also shown in Fig. 13 and Table 5 are the theoretical modal shapes and modal frequencies for modes (10,11), (9,13), and (12,4) which are the 199–201st modes.

Measured and calculated modes match closely. The positions of the nodal lines are correct for the three modes. The measured modal shapes are almost identical for the two experimental setups. These results, together with the estimation of uncertainties (see below) illustrate the precision and reproducibility of the method.

The values of the calculated modal frequencies (Table 5) are systematically slightly larger than the measured ones by 0.2–0.5%. Since this is also the case in the 2100 Hz frequency-band (see below), there must be a systematic error for which we propose the following explanations. (a) The value of  $B_{\text{FEM}}$  used for the calculation of the modal frequencies is overestimated. (b) The improved Rayleigh method overestimates modal frequencies.<sup>7</sup> (c) In Kirchhoff–Love plate theory, the rotary inertia and the shear effects are ignored; for the plate considered here, the correction given by the more precise Mindlin theory [23] in the  $\omega(k)$  curve is around  $-0.5\%$  at 1700 Hz.

Uncertainties reported in Table 6 for the two suspension conditions are evaluated according to the following equation:

$$\frac{\Delta f}{\bar{f}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{N_b} \sum_i (f_i - \bar{f})^2}}{\bar{f}} \quad (24)$$

with  $\bar{f}$  the weighted mean of the estimated modal frequencies and  $N_b$  the number of estimations (100 in our case). This uncertainty estimate is pessimistic since deviations are not weighted here...

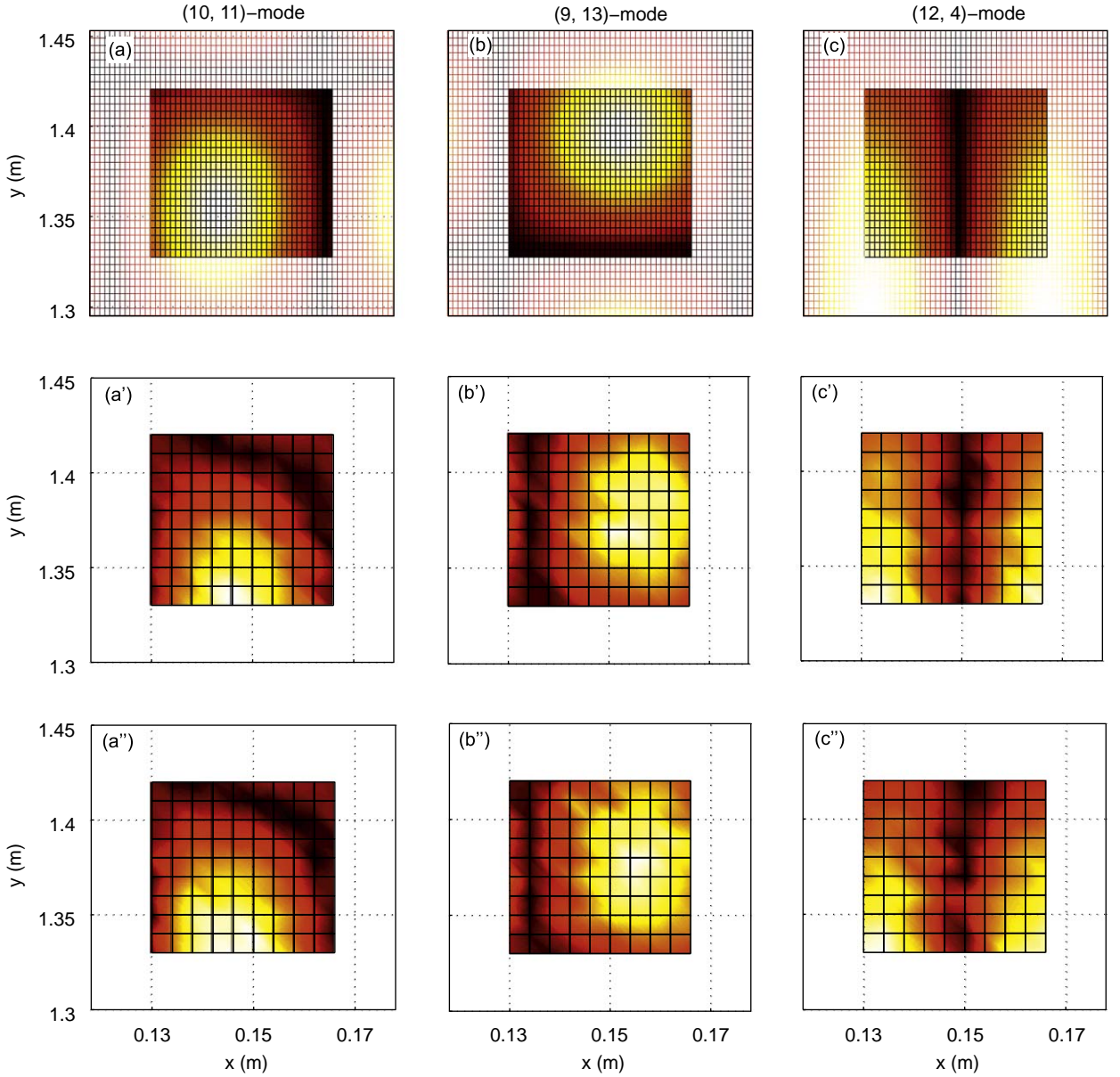
During measurements with the first experimental setup, we noticed a drift in the estimation of the frequencies and possibly also in the estimation of the damping factors (see Fig. 14(a) for the chronological representation of these

<sup>5</sup> Simulations are carried out with eight-node thin-shell elements (as in Ref. [21]). A mesh of  $70 \times 100$  elements is used, corresponding to  $\approx 35$  points per wavelength at 200 Hz in the x-direction (respectively,  $\approx 30$  point in the y-direction).

<sup>6</sup> The values provided by the manufacturer for the duraluminium properties are  $E = 7.4 \times 10^{10} \text{ Pa}$ ,  $\rho = 2790 \text{ kg m}^{-3}$ , and  $\nu = 0.33$ . With these values, the value retained for  $B_{\text{FEM}}$  corresponds to  $h = 4.96 \text{ mm}$ .

<sup>7</sup> According to Ref. [19]: by the Rayleigh principle, if a suitable waveform  $W$  is assumed, satisfying approximately the boundary conditions, the resulting frequency value is very near, but higher than, the true value, because the assumption of an incorrect waveform is equivalent to the introduction of constraints to the system.





**Fig. 13.** Plate (C): partial modal analysis between 1685 and 1697 Hz, with  $\mu \simeq 45\%$ . (a)–(c) Theoretical modal shapes obtained by the improved Rayleigh method. (a')–(c') Measured modal shapes with the rubber-bands suspension. (a'')–(c'') Measured modal shapes with the nylon-lines suspension.

estimations). The second suspension setup (nylon lines in small holes) appears to be more stable (Fig. 14). The overall  $+0.4$  Hz frequency drift in the rubber-band case is larger than the uncertainty in the estimation of the modal frequency. The interpretation for the sign of the drift on frequency, for the fact that  $f_{\text{rub}} < f_{\text{nyl}}$ , and for similar observations on the damping factors goes as follows.

Rubber bands add a mass to the system. However, rubber bands slip slightly and the added mass decreases in time. This is also consistent with the very slight negative drift in the damping factor  $\alpha_{\text{rub}}$ . The  $\alpha_{\text{nyl}} > \alpha_{\text{rub}}$  observation is interpreted by the fact that the vibrations of the plate are more strongly transmitted to the suspension frame by the nylon lines than by rubber bands.

In the second frequency-band (2065–2110 Hz) where modal analysis was performed, the modal overlap factor is  $\approx 70\%$ . Compared with the 1685–1697 Hz frequency-band, the important increase in damping factor (from  $\approx 4$  to  $\approx 15 \text{ s}^{-1}$ ) and thus in modal overlap is due to the sudden increase in acoustical radiation when the frequency approaches the coincidence frequency  $f_c$ . For this isotropic plate,  $f_c$  is given (see Ref. [24] for example) by

$$f_c = \frac{c_a^2}{2\pi h} \sqrt{\frac{12\rho(1-\nu^2)}{E}} \quad (25)$$

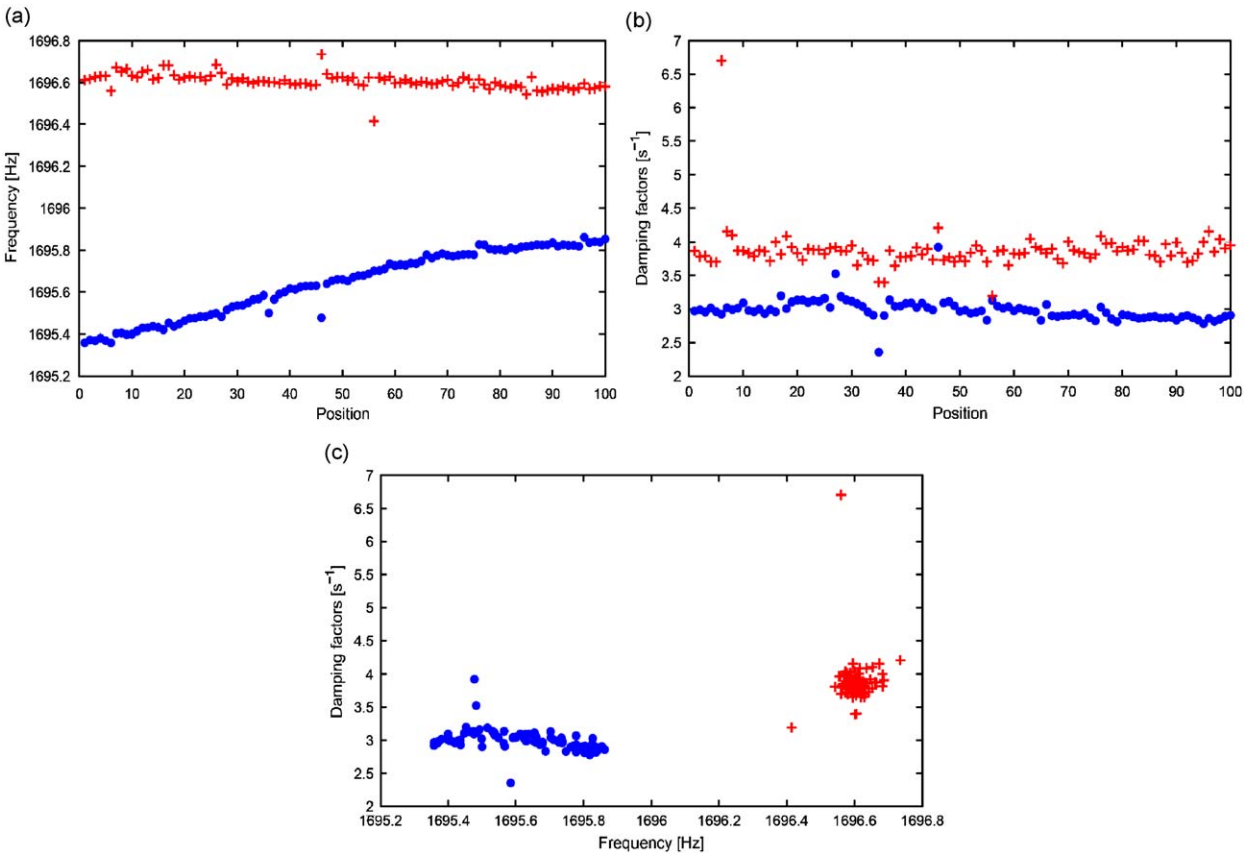
**Table 5**  
Estimations of modal parameters between 1685 and 1697 Hz for two suspension conditions.

	(10,11)-mode		(9,13)-mode		(12,4)-mode	
$f_{\text{RAY}}$ (Hz)	1695.5		1697.0		1703.4	
Suspension	Rub.	Nyl.	Rub.	Nyl.	Rub.	Nyl.
$f$ (Hz)	1689.9	1690.0	1693.1	1693.3	1695.7	1696.6
$\alpha$ ( $\text{s}^{-1}$ )	4.2	4.6	4.3	4.7	3.0	3.9

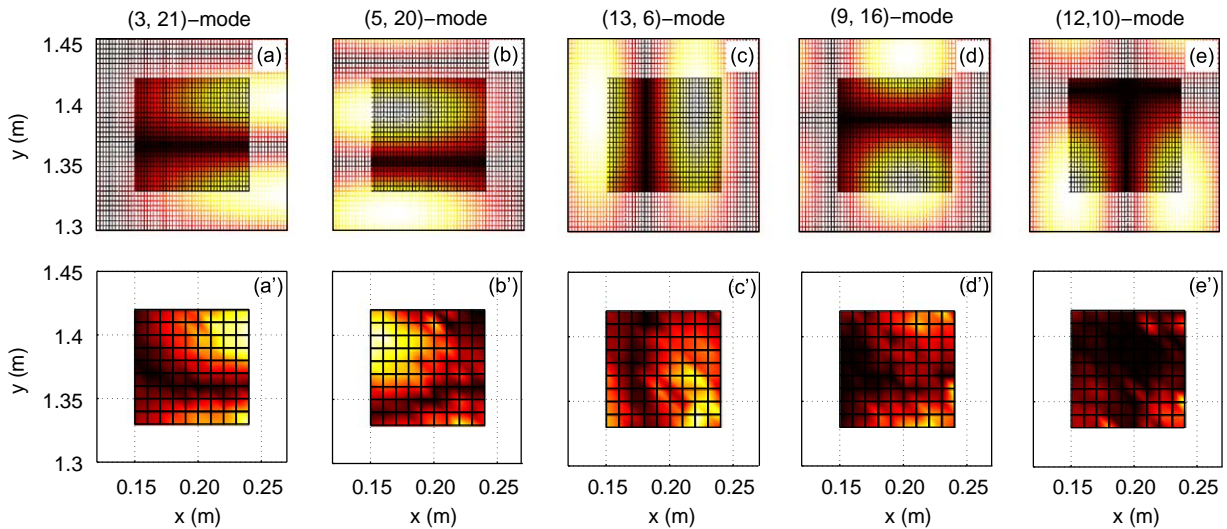
$f_{\text{RAY}}$ : conservative plate treated by the improved Rayleigh method.  $f$  and  $\alpha$ : experimental determinations.

**Table 6**  
Uncertainties on frequencies and damping factors for the three modes between 1685 and 1697 Hz under two suspension conditions.

		(10,11)-mode	(9,13)-mode	(12,4)-mode
Rubber-bands suspension	$\frac{\Delta f_{\text{rub}}}{f_{\text{rub}}}$	$7.1 \times 10^{-5}$	$9.0 \times 10^{-5}$	$9.4 \times 10^{-5}$
	$\frac{\Delta \alpha_{\text{rub}}}{\alpha_{\text{rub}}}$	$8.5 \times 10^{-2}$	$6.7 \times 10^{-2}$	$5.3 \times 10^{-2}$
Nylon-lines suspension	$\frac{\Delta f_{\text{nyl}}}{f_{\text{nyl}}}$	$4.0 \times 10^{-5}$	$5.1 \times 10^{-5}$	$2.2 \times 10^{-5}$
	$\frac{\Delta \alpha_{\text{nyl}}}{\alpha_{\text{nyl}}}$	$8.5 \times 10^{-2}$	$4.8 \times 10^{-2}$	$3.9 \times 10^{-2}$



**Fig. 14.** Comparison of the two suspending setups for the (12,4)-mode of plate (C). • marks: rubber-bands suspension. + marks: nylon-lines suspension. (a) Modal frequencies measured chronologically; (b) damping factors measured chronologically; and (c) scattering of modal frequencies and damping factors.



**Fig. 15.** Plate (C): partial modal analysis between 2065 and 2110 Hz, with  $\mu \approx 70\%$ . (a)–(e) Theoretical modal shapes obtained by the improved Rayleigh method. (a')–(e') Measured modal shapes.

**Table 7**

Estimations of modal parameters between 2065 and 2110 Hz for the rubber-band suspension.

	(3,21)-mode	(5,20)-mode	(13,6)-mode	(9,16)-mode	(12,10)-mode
$f_{\text{RAY}}$ (Hz)	2077.3	2086.6	2096.7	2100.3	2112.6
$f$ (Hz)	2069.1	2075.7	2081.5	2092.1	2097.5
$\alpha$ ( $\text{s}^{-1}$ )	10.3	10.6	15.6	15.8	18.8

$f_{\text{RAY}}$ : conservative plate treated by the improved Rayleigh method.  $f$  and  $\alpha$ : experimental determinations.

where  $c_a$  is the speed of sound in air ( $\approx 343 \text{ m s}^{-1}$ ). Above this frequency, the wavelength of flexural waves in the plate is larger than the wavelength of acoustical waves in air and an infinite plate radiates sound; for a finite plate, the increase in radiation efficiency is gradual when the frequency approaches  $f_c$  (see Fig. 16). In our case, the coincidence frequency is about 2.4 kHz.

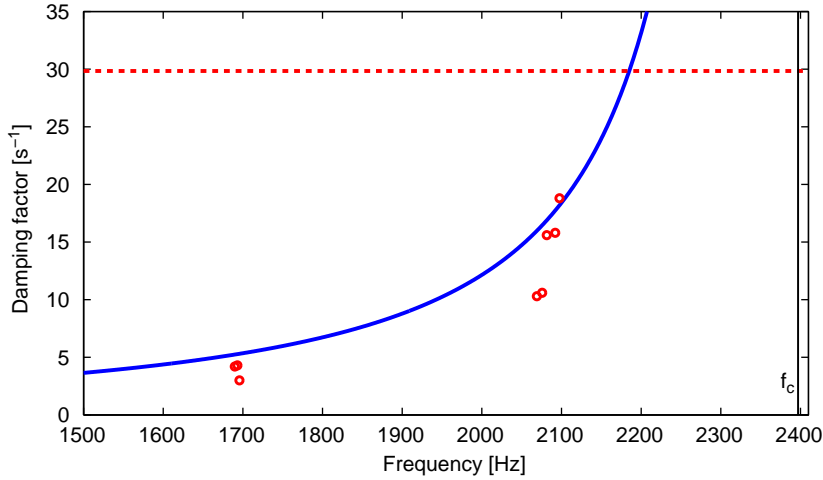
Despite the high modal overlap factor, the ESTER procedure clearly detects the correct number of modes (Fig. 12(b)). The modal analysis results are given in Fig. 15 and Table 7 together with the results of calculations for the 243–247th modes, corresponding to the (3,21), (5,20), (13,6), (9,16), and (12,10) modal shapes.

Matching is excellent for frequency values and correct for modal shapes. The higher values of calculated modal frequencies (Table 7) can be explained as in the 1700 Hz frequency-band. In the (12–10)-mode case, the analysed region is essentially nodal; the signal-to-noise ratio is  $\approx 30 \text{ dB}$  and the method clearly meets its limits.

Experimental results for the damping factors are displayed as a function of frequency in Fig. 16. Theoretical results in a different configuration are available for the sake of an approximate comparison: in the case of simply supported baffled plate and under the assumption of the diffuse wavefield, Maidanik [25] gives an analytical expression of the average damping due to radiation. The other contribution to damping of an aluminium plate is due to thermoelastic losses [26]. The damping model established by Chaigne et al. [26] gives  $\alpha_{\text{therm}} < 0.14 \text{ s}^{-1}$  for this aluminium plate. This value is very small compared with radiation damping in this frequency range of interest. It has therefore not been taken into account by the solid-curve in Fig. 16. The main physical difference between experimental and theoretical conditions lies in the acoustical short-circuit between the front and the back of the plate, reducing radiation efficiency and decreasing damping factors. This is compatible with the discrepancy between the measured points and the curve given by Maidanik.

#### 4. Conclusion

The modal analysis method presented in this article resolves cases in which the Fourier transform meets its limits. Partial modal analyses of vibrating plates with high modal overlap (up to 70%) match theoretical modal predictions.



**Fig. 16.** Damping factors due to the radiation of an aluminium plate. Boundary conditions and radiation conditions are not the same for the experimental and for the theoretical determinations.  $\circ$  marks: measured damping factors in the two frequency-bands where modal analysis was performed. Solid line: damping curve due to acoustical radiation of a simply supported baffled plate (after Ref. [25]). Dashed line: (asymptotic) damping factor  $\alpha$  of an infinite plate above the coincidence frequency  $f_c$  ( $\alpha_\infty = \rho_a c / (\rho h)$ , where  $\rho_a = 1.2 \text{ kg m}^{-3}$  is the density of air).

This method may contribute to filling the gap between the low-frequency and the high-frequency domains where Fourier modal analysis and statistical methods, respectively, apply. The ESTER technique appears as a good tool for estimating the modal density, an essential parameter for the study of vibrating structures in the mid- or high-frequency domains.

At frequencies larger than those presented here the results were not as satisfactory; this is mainly due to the signal-to-noise ratio limitation of the signal processing method. Moreover, the *spatial resolution* of the method becomes also a limiting factor: the uncertainty in the position of the impact-excitation ( $\approx 0.5 \text{ cm}$ ) becomes significant compared with the grid-step ( $1 \text{ cm}$ ). However, a larger grid-step would not be acceptable at the considered wavelength (about  $15 \text{ cm}$  at  $2.1 \text{ kHz}$  for plate (C)).

The SNR limitation can be partly overcome by the use of a continuous excitation with a signal that allows the impulse response reconstruction by deconvolution techniques (*swept-sine technique* as in Ref. [27], for example).

## Appendix A. The three-term Rayleigh method

According to classical plate theory (see e.g. Ref. [28]), the maximum strain energy, or potential energy of bending  $V$ , of an isotropic rectangular thin plate is given by

$$V_{\max} = \frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^b \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dy dx \quad (\text{A.1})$$

where  $W$  is the modal shape and  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ . The maximum kinetic energy  $T$  of the plate is

$$T_{\max} = \frac{\rho h \omega^2}{2} \int_0^a \int_0^b W^2 dy dx \quad (\text{A.2})$$

The Rayleigh principle yields the modal angular frequency  $\omega$

$$\omega^2 = \frac{2V_{\max}}{\rho h \int_0^a \int_0^b W^2 dy dx} \quad (\text{A.3})$$

Kim and Dickinson [20] extend the Rayleigh method [19] by considering three terms in  $W$

$$W_{(m,n)}(x,y) = X_m(x)Y_n(y) - cX_{m'}(x)Y_n(y) - dX_m(x)Y_{n'}(y) \quad (\text{A.4})$$

where  $X_m(x)$  (respectively,  $Y_n(y)$ ) is the  $m$  (respectively,  $n$ )-th order normal modal shape of a beam with the same boundary conditions as the corresponding edges of the plate;  $X_{m'}(x)$ ,  $Y_{n'}(y)$  are the next higher beam modal shapes, and  $c$  and  $d$  are constant quantities given below. In our case, boundary conditions are free-free:  $m' = m + 2$  and  $n' = n + 2$ . The modal deflection  $X_m$  of a free-free beam are given in Eq. (11) of Ref. [19].

By substituting Eq. (A.4) into Eqs. (A.3) and (A.1), the modal angular frequency is

$$\omega_{m,n}^2 = \frac{D\pi^4}{\rho h a^2 b^2} \frac{C_{m,n} + c^2 C_{m,n+2} + d^2 C_{m+2,n} - 2cE_{m,n} - 2dE_{n,m} + 2cdF}{1 + c^2 + d^2} \quad (\text{A.5})$$

with

$$C_{m,n} = G_m \frac{b^2}{a^2} + G_n \frac{a^2}{b^2} + 2(vH_m H_n + (1-v)J_m J_n)$$

$$E_{m,n} = vH_m(K_n + L_n) + 2(1-v)J_m M_n$$

$$F_{m,n} = -v(K_m K_n + L_m L_n) + 2(1-v)M_m M_n$$

The values of  $G_m$ ,  $H_m$ ,  $J_m$ ,  $K_m$ ,  $L_m$ ,  $M_m$  are given in Refs. [19] (Table 1) and [20] (Table 1). Finally,  $c$  and  $d$  can be determined by using the minimum potential energy theorem

$$\frac{\partial V_{\max}}{\partial c} = \frac{\partial V_{\max}}{\partial d} = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{C_{m+2,n}E_{m,n} - E_{n,m}F}{C_{m,n+2}C_{m+2,n} - F^2} \\ d = \frac{C_{m,n+2}E_{n,m} - E_{m,n}F}{C_{m,n+2}C_{m+2,n} - F^2} \end{cases}$$

## References

- [1] D.J. Ewins, *Modal Testing*, Research Studies Press, 1984.
- [2] M.P. Norton, *Fundamentals of Noise and Vibration Analysis for Engineers*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [3] E.J. Skudrzyk, Vibrations of a system with a finite or an infinite number of resonances, *Journal of the Acoustical Society of America* 30 (12) (1958) 1140–1152.
- [4] E. Skudrzyk, The mean-value method of predicting the dynamic-response of complex vibrators, *Journal of the Acoustical Society of America* 67 (4) (1980) 1105–1135.
- [5] C. Lesueur, *Rayonnement Acoustique des Structures*, Eyrolles, 1988.
- [6] R.H. Lyon, R.G. Dejong, *Theory and Application of Statistical Energy Analysis*, second ed., Butterworth Heinemann, 1995.
- [7] J. Berthaut, M.N. Ichchou, L. Jezequel, Piano soundboard: structural behavior, numerical and experimental study in the modal range, *Applied Acoustics* 64 (11) (2003) 1113–1136.
- [8] R.S. Langley, Spatially averaged frequency-response envelopes for one-dimensional and 2-dimensional structural components, *Journal of Sound and Vibration* 178 (4) (1994) 483–500.
- [9] F.J. Fahy, A.D. Mohammed, A study of uncertainty in applications of sea to coupled beam and plate systems. 1. Computational experiments, *Journal of Sound and Vibration* 158 (1) (1992) 45–67.
- [10] R.S. Langley, A wave intensity technique for the analysis of high-frequency vibrations, *Journal of Sound and Vibration* 159 (3) (1992) 483–502.
- [11] R. Roy, T. Kailath, Esprit—estimation of signal parameters via rotational invariance techniques, *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing* 37 (7) (1989) 984–995.
- [12] R. Badeau, B. David, G. Richard, A new perturbation analysis for signal enumeration in rotational invariance techniques, *IEEE Transactions on Signal Processing* 54 (2) (2006) 450–458.
- [13] G.M. Riche de Prony, Essai expérimental et analytique, *Journal de l'école Polytechnique* 1 (22) (1795) 24–76.
- [14] V.F. Pisarenko, The retrieval of harmonics from a covariance function, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 33 (1973) 347–366.
- [15] R. Schmidt, A Signal Subspace Approach to Multiple Emitter Location and Spectral Estimation, PhD Thesis, Stanford University, 1981.
- [16] Y. Hua, T.K. Sarkar, Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise, *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing* 38 (5) (1990) 814–824.
- [17] J. Laroche, The use of the matrix pencil method for the spectrum analysis of musical signals, *Journal of the Acoustical Society of America* 94 (4) (1993) 1958–1965.
- [18] R. Badeau, Méthodes à haute résolution pour l'estimation et le suivi de sinusoides modulées. Application aux signaux de musique, PhD Thesis, ENST, 2005.
- [19] G.B. Warburton, The vibration of rectangular plates, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers A* 168 (1954) 371–381.
- [20] C.S. Kim, S.M. Dickinson, Improved approximate expressions for the natural frequencies of isotropic and orthotropic rectangular-plates, *Journal of Sound and Vibration* 103 (1) (1985) 142–149.
- [21] S. Hurllebaus, Calculation of eigenfrequencies for rectangular free orthotropic plates—an overview, *Zamm-Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Mechanik* 87 (10) (2007) 762–772.
- [22] A.E.H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, fourth ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1927.
- [23] R.D. Mindlin, Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme* 18 (1) (1951) 31–38.
- [24] K. Renji, P.S. Nair, Critical and coincidence frequencies of flat panels, *Journal of Sound and Vibration* 205 (1) (1997) 19–32.
- [25] G. Maidanik, Response of ribbed panels to reverberant acoustic fields, *Journal of the Acoustical Society of America* 34 (6) (1962) 809–826.
- [26] A. Chaigne, C. Lambourg, Time-domain simulation of damped impacted plates. I. Theory and experiments, *Journal of the Acoustical Society of America* 109 (4) (2001) 1422–1432.
- [27] A. Farina, Advancements in impulse response measurements by sine sweeps, *122nd Audio Engineering Society Convention*, Vienna, Austria, 2007.
- [28] S. Timoshenko, *Vibration Problems in Engineering*, fourth ed., Wiley, New York, 1974.



## 4 Limitations de la méthode – Perspectives

La méthode d'analyse modale présentée dans la section précédente a permis de résoudre des cas où les techniques classiques basées sur la transformée de Fourier sont inadaptées. Des analyses modales partielles de plaques vibrantes dans le domaine des fréquences intermédiaires (jusqu'à 70% de recouvrement modal) ont été efficacement menées. Les résultats expérimentaux concordent bien avec les calculs théoriques obtenus par une méthode de Rayleigh *améliorée* (à trois termes) développée par Kim et Dickinson [73]. Par ailleurs, la comparaison de deux cas expérimentaux illustre les très bonnes performances de l'analyse, en termes de reproductibilité des résultats et de précision des estimations des paramètres modaux. En particulier la méthode a permis de rendre compte de manière précise de l'augmentation de l'amortissement par rayonnement au voisinage de la fréquence critique pour la dernière application. Néanmoins, plusieurs limitations existent et sont présentées ci-dessous.

### 4.1 Incertitudes sur la position d'impact et l'angle d'impact

Tout d'abord une première limitation qui est apparue au cours de nos études successives est liée à la résolution spatiale. En hautes fréquences, les longueurs d'ondes étant très petites, le *pas* de mesure doit être sensiblement diminué. Or nous avons évalué l'incertitude sur la position de l'excitation par impact à environ 0.5 cm ; il apparaît donc difficile de mailler plus finement que ce qui a été fait pour la plaque C (1 cm). En outre, la direction de l'impact n'étant jamais exactement perpendiculaire à la surface de la plaque, l'amplitude mesurée n'est qu'approximativement égale à l'intensité réelle de l'excitation.

### 4.2 Rapport signal à bruit

La principale limitation de cette méthode vient du rapport signal à bruit (RSB). Comme nous l'avons vu pour la plaque C par exemple, le recouvrement modal élevé et les temps de décroissance modaux très courts (en particulier au voisinage de la fréquence critique) rendent inefficace l'algorithme ESPRIT pour des fréquences supérieures à 2.1 kHz pour cette plaque ; le signal utile étant vite noyé dans le bruit de mesure.

Une solution envisagée pour augmenter le RSB en hautes fréquences est de remplacer l'excitation impulsionnelle par marteau d'impact par une excitation de type *continue* (par haut-parleur par exemple) dont le signal d'excitation est un sinus glissant logarithmique. La réponse impulsionnelle peut alors se reconstruire par un processus de déconvolution. La méthode est inspirée des travaux de Farina [53] reprise par Arcas [2], puis développée par Rébillat *et al.* dans [101] où les fondements mathématiques de la méthode sont donnés. Cette méthode de mesure sera appliquée au chapitre suivant sur la table d'harmonie de piano. Précisons cependant qu'elle ne permet pas d'obtenir les déformées modales.

## 5 Conclusion

L'étude du comportement vibratoire des structures dans le domaine des moyennes fréquences nécessite l'utilisation de méthodes permettant de s'affranchir des limitations naturelles de l'analyse de Fourier en termes de résolution spectrale. Certains auteurs préfèrent adopter une vision ondulatoire du problème dans ce domaine fréquentiel en faisant l'hypothèse d'une répartition de l'énergie dans toutes les directions de propagation sans se soucier de savoir si l'hypothèse de champ diffus est vérifiée.

Nous avons choisi de garder une représentation modale du problème, valide en théorie sur tout le spectre pour un système linéaire amorti. Une nouvelle méthode d'analyse modale de type *temporelle* basée sur l'algorithme *haute résolution* ESPRIT a été présentée dans ce chapitre. Elle donne des résultats très satisfaisants sur des plaques minces. De plus, le critère de sélection de l'ordre de modélisation ESTER apparaît comme un outil très performant pour estimer la densité modale en moyennes fréquences, indicateur global essentiel pour l'étude du comportement vibratoire des structures dans ce domaine fréquentiel. Ces bons résultats nous ont encouragés à appliquer cette méthode pour l'identification modale d'une table d'harmonie de piano. C'est l'objet du chapitre suivant. Afin d'augmenter le rapport signal à bruit en hautes fréquences une excitation de type *continue* sera également utilisée.

## Chapitre 3

# Études modales d'une table d'harmonie de piano droit placée dans une chambre semi-anéchoïque

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Modes propres et densité modale</b> .....	<b>62</b>
1.1	Modes propres de la plaque orthotrope simplement supportée .....	62
1.2	Densité modale .....	63
<b>2</b>	<b>Estimation modale d'une table d'harmonie – Application de l'analyse modale haute résolution</b> .....	<b>74</b>
2.1	Linéarité de la réponse dynamique .....	75
2.2	Paramètres modaux estimés entre 0 et 550 Hz (excitation impulsionnelle) .....	80
2.3	Paramètres modaux estimés entre 500 Hz et 2.5 kHz (excitation continue) .....	87
<b>3</b>	<b>Comparaison avec un modèle en éléments finis de la table raidie</b> .....	<b>91</b>
<b>4</b>	<b>Conclusion</b> .....	<b>96</b>

---

Dans ce chapitre, nous présentons de nouveaux résultats expérimentaux obtenus sur une table de piano droit placée dans une chambre semi-anéchoïque. L'identification modale de la structure est étendue vers les moyennes et hautes fréquences grâce à la méthode développée au chapitre précédent.

Tout d'abord nous donnons quelques résultats généraux sur le cas simple d'une plaque orthotrope. La notion de densité modale est introduite et l'influence des conditions aux limites sur ce descripteur global est étudiée en particulier. L'exemple d'une plaque en épicea est considéré. Puis nous présentons nos résultats expérimentaux que nous comparons dans une dernière partie à un calcul par éléments finis. L'observation d'une densité modale constante jusqu'à environ 1.1 kHz suggère d'examiner si et comment la table peut être considérée comme une plaque homogène, orthotrope ou non. Au-delà de cette fréquence, les ondes sont localisées entre deux raidisseurs successifs.



## 1 Modes propres et densité modale

### 1.1 Modes propres de la plaque orthotrope simplement supportée

Considérons le cas d'une plaque mince rectangulaire orthotrope *spéciale* (taillée suivant les axes d'orthotropie) et de dimensions  $L_x$  et  $L_y$ <sup>1</sup>. Nous la supposons appuyée sur ses bords et non amortie. Le schéma modal d'une telle plaque est connu ; les conditions aux limites de type *appui simple* (ou plaque *simplement supportée*) sont les seules pour lesquelles les déformées et fréquences modales peuvent s'écrire analytiquement. C'est un cas très utilisé en mécanique des vibrations : il permet par exemple de calculer de manière analytique la puissance acoustique rayonnée par une plaque bafflée (à partir de l'intégrale de Rayleigh - voir l'annexe E).

Le déplacement transversal  $w$  dû à la flexion de la plaque mince orthotrope homogène est gouverné par l'équation 3.1, directement reprise de A.14, sous les hypothèses de Love-Kirchhoff (annexe A).

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + (D_2 + D_4) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = f(x, y, t) \quad (3.1)$$

Les conditions aux limites (déplacement et moments de flexion nuls aux bords) s'écrivent en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} w = 0 & \text{et} & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 & \text{en} & x = 0 & \text{et} & x = L_x \\ w = 0 & \text{et} & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 & \text{en} & y = 0 & \text{et} & y = L_y \end{cases} \quad (3.2)$$

On montre aisément que les modes propres solutions de 3.1 et satisfaisant 3.2 s'écrivent [57] :

$$\Phi_{mn}(x, y) = \sin(k_{x_m} x) \sin(k_{y_n} y) \quad (3.3)$$

avec  $m$  et  $n$  des entiers strictement positifs. Les nombres d'ondes dans les directions  $x$  et  $y$  valent :

$$k_{x_m} = \frac{m \pi}{L_x} \quad , \quad k_{y_n} = \frac{n \pi}{L_y} \quad (3.4)$$

Les valeurs  $m - 1$  et  $n - 1$  donnent le nombre de lignes nodales (sans compter les bords de la plaque appuyée) du mode  $(m, n)$  selon  $x$  et  $y$  respectivement. L'équation de dispersion A.16 donne alors les pulsations propres qui s'écrivent :

$$\begin{aligned} \omega_{mn}^2 &= \frac{1}{\rho h} \left[ D_1 k_{x_m}^4 + D_3 k_{y_n}^4 + (D_2 + D_4) k_{x_m}^2 k_{y_n}^2 \right] \\ \Rightarrow \quad \omega_{mn} &= \pi^2 \sqrt{\frac{1}{\rho h} \left[ D_1 \frac{m^4}{L_x^4} + D_3 \frac{n^4}{L_y^4} + (D_2 + D_4) \frac{m^2}{L_x^2} \frac{n^2}{L_y^2} \right]} \end{aligned} \quad (3.5)$$

<sup>1</sup>Les axes du repère  $(O, x, y, z)$  coïncident avec les axes d'orthotropie.

Les modes propres  $\Phi_{mn}$  sont orthogonaux entre eux ; ils vérifient le système B.4. Ici l'orthogonalité au sens de la masse s'écrit, en normalisant par l'amplitude des déformées modales :

$$\begin{aligned} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \rho h \Phi_{mn}(x, y) \Phi_{m'n'}(x, y) dx dy &= m_{mn} \delta_{mn} \delta_{m'n'} \\ \Rightarrow \rho h \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \sin^2 \left( \frac{m \pi x}{L_x} \right) \sin^2 \left( \frac{n \pi y}{L_y} \right) dx dy &= m_{mn} \end{aligned} \quad (3.6)$$

où  $m_{mn}$  est la masse modale. Après évaluation des integrales, on a  $m_{mn} = \frac{M_{\text{tot}}}{4}$ .

Dans le cas des tables d'harmonie de piano, la structure est collée au meuble. Les conditions aux limites auxquelles cette fixation se rapprocherait le plus sont l'appui simple et l'encastrement. En toute rigueur aucune des deux conditions aux limites ne peut être considérée comme valable mais il a été montré que les premières fréquences propres se rapprochent du cas simplement supporté, puis très vite – lorsque la fréquence augmente – du cas encastrement (Nakamura, [93]). L'influence des conditions aux limites est discutée au 1.2.3.

## 1.2 Densité modale

La densité modale est une notion fondamentale en vibration des structures. Elle est définie comme le nombre de résonances propres d'une structure pour un intervalle fréquentiel donné. C'est un *descripteur* essentiel dans le domaine des moyennes et plus encore des hautes fréquences où la réponse vibratoire d'une structure peut être représentée de manière statistique. La densité modale s'avère être un paramètre clé dans notre étude et nous y ferons appel plusieurs fois dans la suite de notre exposé.

La densité modale asymptotique d'une structure bi-dimensionnelle peut être calculée facilement en se plaçant dans l'espace des nombres d'onde (voir la figure 3.1). Cette technique développée par Courant<sup>2</sup> [37],[38] puis Bolotin [18],[19] consiste à représenter graphiquement l'équation de dispersion  $\omega = f(k_x, k_y)$  d'une structure mécanique en traçant le profil des pulsations constantes dans *l'espace des nombres d'onde* (appelé encore *plan d'onde* ou *k-espace*). Dans un tel espace, le nombre de modes  $N(\Omega)$  de pulsations propres inférieures à une pulsation  $\Omega$  donnée est le nombre de modes présents dans l'aire intérieure au profil  $K(\Omega)$  (voir par exemple la figure 3.1.a). La densité modale  $n(\Omega)$  est alors donnée simplement par dérivation de  $\frac{dN}{d\Omega}$ .

Nous rappelons ici le calcul de la densité modale asymptotique d'une plaque mince isotrope. L'extension au cas d'une plaque orthotrope est donnée ensuite, et enfin nous présentons l'influence des conditions aux limites sur cette grandeur en basses fréquences.

---

<sup>2</sup>Courant l'appliqua initialement au cas des membranes et des plaques minces isotropes.

### 1.2.1 Plaque isotrope

En reprenant les notations de la section 1.1 et dans le cas isotrope, les pulsations propres et les nombres d'ondes d'une plaque simplement supportée sont donnés par :

$$\omega_{mn} = k_{mn}^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad \text{avec} \quad k_{mn}^2 = k_{x_m}^2 + k_{y_n}^2 = \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 \quad (3.7)$$

Ainsi dans l'espace des nombres d'onde (figure 3.1.a), les  $k_{mn}$  peuvent être représentés par un maillage dont les pas d'espace sont  $\pi/L_x$  suivant l'abscisse et  $\pi/L_y$  suivant l'ordonnée. Chaque nombre d'onde est alors un vecteur d'origine  $O$  et d'extrémité un des nœuds du maillage. Les modes  $k_{mn}$  de pulsation inférieure à  $\Omega$  vérifient  $k_{mn}^2 < \Omega^2 \sqrt{\rho h/D}$ . Ils correspondent à des nœuds du maillage rectangulaire du plan d'onde, compris à l'intérieure d'un quart de cercle de rayon  $\sqrt{\Omega} (\rho h/D)^{1/4} = K$ . Leur nombre lorsque  $K$  est grand (devant  $\pi/L_x, \pi/L_y$ ) tend vers le quotient entre la surface de ce quart de cercle, variant en  $K^2$  et la surface de la maille.

$$N(\omega) = \frac{\frac{1}{4} \pi k^2(\omega)}{\frac{\pi}{L_x} \frac{\pi}{L_y}} = \frac{S}{4\pi} k^2(\omega) = \frac{S}{4\pi} \omega \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \quad (3.8)$$

où  $S = L_x L_y$  est la surface de la plaque. Ce calcul compte le nombre de mailles. Le nombre de nœuds est légèrement supérieur à celui des mailles : nœuds associées aux modes  $(m, 0)$  et  $(0, n)$ , en nombre proportionnel à  $K$  et donc négligeable asymptotiquement. Le comptage rigoureux est important pour la détermination de  $n$  en basses fréquences ; il sera présenté en 1.2.3, pour les différentes conditions aux limites.

La densité modale asymptotique que l'on notera  $n_\infty(\omega)$  est alors la dérivée du nombre de modes  $N(\omega)$ , c'est à dire :

$$n_\infty(\omega) = \frac{dN(\omega)}{d\omega} = \frac{S}{4\pi} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \quad (3.9)$$

en [modes s rad<sup>-1</sup>]. En pratique on exprime la densité modale asymptotique  $n_\infty(f)$  en [modes Hz<sup>-1</sup>]. Le passage de  $n_\infty(f)$  à  $n_\infty(\omega)$  est donné par :

$$\boxed{n_\infty(f) = 2\pi n_\infty(\omega) = \frac{S}{2} \sqrt{\frac{\rho h}{D}}} \quad (3.10)$$

On peut réécrire ces deux quantités sous forme d'intégrales en coordonnées polaires en posant

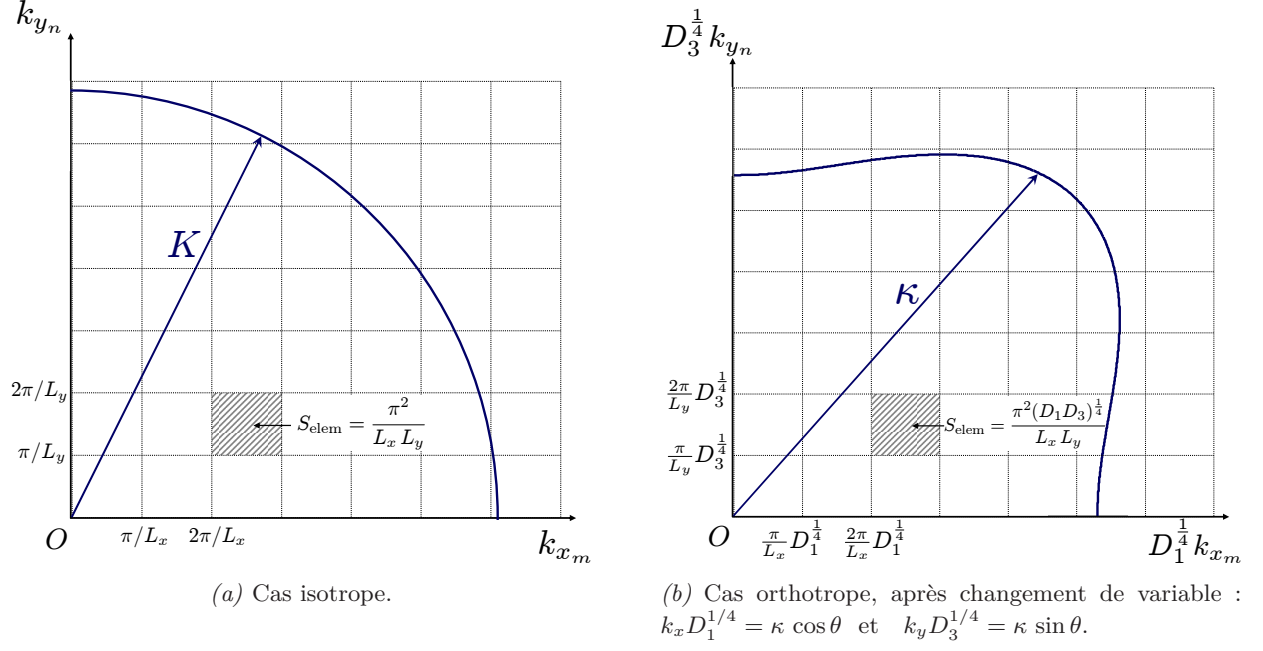


FIG. 3.1 – Représentation de l'espace des nombres d'onde (transformé dans la figure b) pour un système bidimensionnel. Chaque nœud du maillage correspond à un nombre d'onde.

$k_x = k \cos(\theta)$  et  $k_y = k \sin(\theta)$ . On a ainsi :

$$N(\omega) = \frac{S}{\pi^2} \int_0^k \int_0^{\pi/2} k(\omega, \theta) d\theta dk = \frac{S}{2\pi^2} \int_0^{\pi/2} k^2(\omega, \theta) d\theta \quad (3.11)$$

$$\text{et} \quad n_\infty(\omega) = \frac{S}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} k(\omega, \theta) \frac{dk(\omega, \theta)}{d\omega} d\theta \quad (3.12)$$

Cette dernière relation montre en particulier que pour une structure bidimensionnelle dont l'équation de dispersion est de la forme  $k \propto \omega^{1/2}$ , la densité modale est indépendante de la fréquence. Weinreich [123] généralise ce raisonnement à n'importe quelle structure de dimensionnalité  $d$  dont la relation de dispersion est donnée asymptotiquement ( $kL \gg 1$ ,  $L$  étant la taille caractéristique du milieu) par  $k \propto \omega^{1/\alpha}$  (avec  $d$  et  $\alpha$  des entiers strictement positifs). Dans le  $k$ -espace de dimensionnalité  $d$ , le nombre de modes  $N(\omega)$  dont les pulsations propres sont inférieures à  $\omega$  varie alors en  $\omega^{\frac{d}{\alpha}}$ , et par dérivation on trouve :

$$n_\infty(\omega) \propto \omega^{\frac{d}{\alpha}-1} \quad (3.13)$$

Ainsi, si l'on considère le cas d'une poutre par exemple (où  $d = 1$  et  $\alpha = 2$ ), on trouve directement que la densité modale décroît en  $\omega^{-1/2}$ ; ou dans le cas d'une salle (où  $d = 3$  et  $\alpha = 1$ ) elle croît en  $\omega^2$ .

### 1.2.2 Plaque orthotrope

La première étude similaire menée dans le cas non isotrope est publiée par Heckl [61] pour des plaques orthotropes dont l'orthotropie est de type elliptique (voir l'équation A.18). Puis Wilkinson [124] et Elishakoff [49] ont étendus la méthode de calcul aux plaques et coques "orthotropes non elliptiques". Plus récemment, Renji *et al.* [102] ont résolu le cas des structures sandwichs en composites en reprenant le calcul de Wilkinson et enfin Langley [78] a montré que la méthode de Courant reste valide pour n'importe quelle plaque anisotrope à condition de modifier les bornes d'intégrations dans les équations 3.11 et 3.12.

Considérons la plaque mince orthotrope *spéciale* étudiée à la section 1.1. Afin de calculer l'intégrale 3.11, on procède au changement de variable suivant proposé par Wilkinson [124] (coordonnées polaires) :

$$\begin{cases} k_x D_1^{1/4} = \kappa \cos \theta \\ k_y D_3^{1/4} = \kappa \sin \theta \end{cases} \quad (3.14)$$

L'équation de dispersion des ondes de flexion

$$\rho h \omega^2 = D_1 k_x^4 + D_3 k_y^4 + (D_2 + D_4) k_x^2 k_y^2$$

se simplifie alors en :

$$\Rightarrow \quad \rho h \omega^2 = \kappa^4 \left( 1 - \alpha^2 \sin^2(2\theta) \right) \quad \text{avec} \quad \alpha^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{D_2 + D_4}{2\sqrt{D_1 D_3}} \right) = \frac{1}{2} (1 - \gamma) \quad (3.15)$$

où  $\gamma = (D_2 + D_4)/(2\sqrt{D_1 D_3})$  est appelé paramètre d'orthotropie. On suppose *a priori*  $E_x \geq E_y$  donc  $D_1 \geq D_3$  ;  $D_1$  est appelée constante de rigidité principale de la plaque orthotrope. Pour la plupart des matériaux  $\gamma$  est inférieur ou égal à 1 et donc  $\alpha^2$  est positif<sup>3</sup> [124]. Le nombre de modes et la densité modale se calculent en traçant le profil des pulsations constantes  $\kappa(\omega, \theta)$  donné par la relation de dispersion 3.15 dans le  $k$ -espace transformé dont l'abscisse est cette fois  $k_x D_1^{1/4}$  et l'ordonnée est  $k_y D_3^{1/4}$  (voir la figure 3.1.b). L'aire intérieure au profil donné par la relation 3.14 divisée par l'aire élémentaire du maillage<sup>4</sup> donne le nombre de modes  $N$ , [124] :

$$\begin{aligned} N(\omega) &= \frac{L_x L_y}{\pi^2 (D_1 D_3)^{1/4}} \int_0^r \int_0^{\pi/2} \kappa(\omega, \theta) d\theta d\kappa = \frac{L_x L_y}{2\pi^2 (D_1 D_3)^{1/4}} \int_0^{\pi/2} \kappa^2(\omega, \theta) d\theta \\ \Rightarrow \quad N(\omega) &= \frac{S \omega}{2\pi^2} \sqrt{\frac{\rho h}{D_1}} \left( \frac{D_1}{D_3} \right)^{1/4} F(\pi/2, \alpha) \end{aligned} \quad (3.16)$$

<sup>3</sup>D'après Renji *et al.* [102] certaines structures sandwich en matériau composite et de type *nid d'abeille* où le module de cisaillement –une fois la structure homogénéisée– serait particulièrement élevé pourraient présenter des paramètres d'orthotropie supérieurs à un.

<sup>4</sup>Les nombres d'onde de la plaque orthotrope prennent les mêmes valeurs discrètes que dans le cas isotrope :  $k_{mn}^2 = m^2 \pi^2 / L_x^2 + n^2 \pi^2 / L_y^2$ , d'après la relation 3.4. Ainsi, dans le  $k$ -espace transformé, l'aire élémentaire du maillage est  $S_{\text{elem}} = \pi^2 (D_1 D_3)^{1/4} / (L_x L_y)$ .

où  $F(\pi/2, \alpha) = \int_0^{\pi/2} (1 - \alpha^2 \sin^2(\theta))^{-1/2} d\theta$  est l'intégrale elliptique complète de première espèce<sup>5</sup> (voir la figure 3.2). La densité modale  $n$  est calculée en dérivant  $N$ , comme précédemment :

$$n(f) = \frac{S}{\pi} \sqrt{\frac{\rho h}{D_1}} \left( \frac{D_1}{D_3} \right)^{\frac{1}{4}} F(\pi/2, \alpha) \quad (3.17)$$

Elle ne dépend pas de la fréquence, comme dans le cas isotrope. Pour  $\gamma < 1$  l'intégrale elliptique est supérieure à  $\pi/2$  (voir la figure 3.2). La densité modale de la plaque orthotrope est alors supérieure à celle d'une plaque isotrope de même géométrie et de constante de rigidité  $D = D_1$  (ce qui est normal puisque la structure est plus souple dans la direction  $O_y$ ) :

$$n_{\text{orth}}(f) = \frac{S}{\pi} \sqrt{\frac{\rho h}{D_1}} \left( \frac{D_1}{D_3} \right)^{\frac{1}{4}} F(\pi/2, \alpha) \geq \frac{S}{2} \sqrt{\frac{\rho h}{D_1}} = n_{\text{iso}}(f) \quad (\text{pour } \alpha \geq 0).$$

De plus, pour  $D = D_1 = D_3 = (D_2 + D_4)/2$  on retrouve bien l'expression de la densité modale d'une plaque isotrope car  $\alpha^2$  est nul dans ce cas et  $F(\pi/2, 0) = \pi/2$ .

Intéressons-nous maintenant au cas qui est le nôtre, d'une plaque orthotrope en épicea que nous supposons dans un premier temps non raidie. Nous reprenons les constantes élastiques mesurées par Berthaut [13] sur un échantillon d'épicéa destiné à la lutherie de tables d'harmonie :  $E_x = 11.5$  GPa,  $E_y = 0.47$  GPa,  $G_{xy} = 0.5$  GPa,  $\nu_{xy} = 0.005$  et  $\rho = 392$  kg m<sup>-3</sup>. Le paramètre d'orthotropie  $\gamma$  est égal à 0.43, donc  $\alpha^2 = 0.28$  et  $F(\pi/2, \alpha) \approx 1.7 > \pi/2$ . La densité modale d'une telle plaque d'épaisseur 8 mm et de dimensions  $L_x = 1.39$  m et  $L_y = 0.91$  m (ce sont les dimensions de la table d'harmonie du piano que nous étudierons à la section 2) est de  $n_{\text{orth}}(f) \simeq 1.22 \cdot 10^{-1}$  modes Hz<sup>-1</sup> soit plus de deux fois la densité modale de la plaque isotrope de géométrie équivalente et de module d'Young  $E_x$  :  $n_{\text{iso}}(f) \simeq 0.50 \cdot 10^{-1}$  modes Hz<sup>-1</sup>.

Concluons ce paragraphe avec le cas, rare, de matériaux dont le paramètre d'orthotropie  $\gamma$  serait supérieur à 1. Le paramètre  $\alpha^2$  serait alors négatif ( $\alpha$  imaginaire pur), et l'intégrale elliptique complète de première espèce<sup>6</sup> inférieurs à  $\pi/2$  (voir la figure 3.2). Ainsi, la densité modale d'une plaque orthotrope pourrait devenir inférieure à celle de la plaque isotrope pour des valeurs de  $\gamma$  très élevées et si  $F(\pi/2, \alpha) < \frac{\pi}{2} \left( \frac{D_3}{D_1} \right)^{1/4}$ . Mais en pratique et comme précisé ci-dessus, les plaques orthotropes rencontrées dans notre étude ne vérifient jamais ces hypothèses.

**Angle d'orthotropie  $\theta_{\perp}$  :** Définissons l'angle d'orthotropie  $\theta_{\perp}$  d'une plaque rectangulaire comme l'angle entre l'axe d'orthotropie principal du matériau et l'axe ( $O_x$ ) du repère initial ( $O, x, y, z$ ) supposé fixe et donné par les côtés de la plaque (voir la figure 3.6 par exemple).

---

<sup>5</sup>Remplacer dans l'intégrale  $\sin^2(2\theta)$  par  $\sin^2(\theta)$  ne change pas la valeur de celle-ci puisque l'intégrande est paire et  $\pi$ -périodique. De plus l'intégrale est toujours définie car  $\alpha^2 \leq 1/2$  puisque  $(D_2 + D_4)/(2\sqrt{D_1 D_3})$  est toujours positif.

<sup>6</sup>En toute rigueur, il faudrait réserver la dénomination *intégrale elliptique complète de première espèce* pour des  $\alpha^2$  positif. Néanmoins, l'intégrale étant également définie pour  $\alpha$  imaginaire pur, nous étendons cette dénomination aux  $\alpha^2$  négatif pour plus de clarté dans l'exposé.

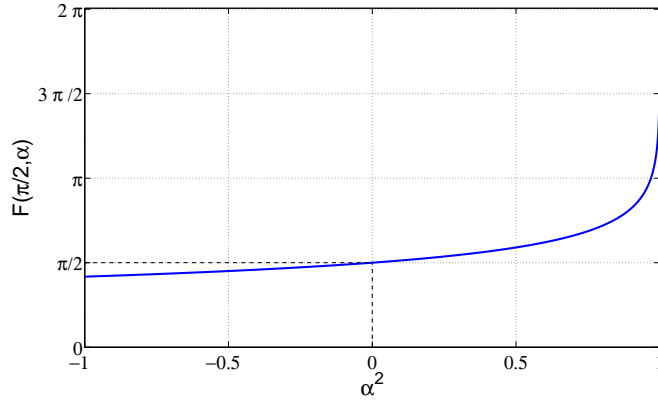


FIG. 3.2 – Intégrale elliptique complète de première espèce  $F(\frac{\pi}{2}, \alpha) = \int_0^{\pi/2} (1 - \alpha^2 \sin^2(\theta))^{-\frac{1}{2}} d\theta$ . Elle est égale à  $\pi/2$  pour  $\alpha^2 = 0$  correspondant au cas orthotrope elliptique, et tend vers  $+\infty$  en 1. Pour la plupart des matériaux orthotropes rencontrés,  $\alpha^2 \geq 0$  et donc  $F \geq \pi/2$ .

Dans la précédente section, la plaque rectangulaire était orthotrope *spéciale* et donc  $\theta_{\perp} = 0^\circ$ . Ce n'est pas le cas des tables d'harmonies de piano : pour un piano droit par exemple, le fil du bois forme habituellement un angle de  $30^\circ$ - $50^\circ$  avec le grand côté (longueur de la table). Ainsi, nous serons amenés dans notre étude à considérer des cas où  $\theta_{\perp} \neq 0^\circ$ . La valeur de la densité modale asymptotique de la structure n'est pas modifiée, bien que les relations 3.11 et 3.12 nécessitent d'être partiellement transformées.

La relation de dispersion des ondes de flexion s'écrit en coordonnées polaires :

$$k^4(\omega, \theta) \left( D_1 \cos^4(\theta - \theta_{\perp}) + D_3 \sin^4(\theta - \theta_{\perp}) + (D_2 + D_4) \cos^2(\theta - \theta_{\perp}) \sin^2(\theta - \theta_{\perp}) \right) = \rho h \omega^2 \quad (3.18)$$

ce qui se simplifie avec le précédent changement de variable en :

$$\kappa^4(\omega, \theta) = \frac{\rho h \omega^2}{1 - \alpha^2 \sin^2(2(\theta - \theta_{\perp}))} \quad (3.19)$$

Elle est représentée dans le  $k$ -espace modifié (figure 3.3), où l'on a fait apparaître cette fois les quatre quadrants ( $\theta \in [0; 2\pi]$ ). Pour un angle d'orthotropie non nul (courbe  $-\cdot-$ ), les axes du plan d'onde ne sont plus axes de symétrie du profil des pulsations constantes : le premier quadrant seul ( $\theta \in [0; \pi/2]$ ) ne fournit plus une description complète du comportement de la structure, contrairement au cas  $\theta_{\perp} = 0$  ou au cas isotrope<sup>7</sup>. La méthode de calcul du nombre de modes et de la densité modale proposée par Courant reste valable sans changer de repère, à condition donc d'étendre dans les équations 3.11 et 3.12 l'intégration à tout le demi-plan supérieur ( $\theta \in [0; \pi]$ ) et

<sup>7</sup>Le profil des pulsations constantes d'une structure isotrope ou orthotrope avec  $\theta_{\perp} = 0$  est dit à *symétrie cyclique d'ordre 4* dans le plan d'onde alors que pour  $\theta_{\perp} \neq 0$  et dans le même repère la *symétrie cyclique est d'ordre 2* [78].

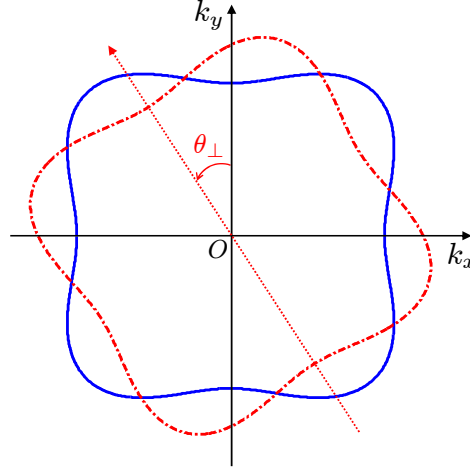


FIG. 3.3 – Représentation dans l'espace des nombres d'onde des relations de dispersion d'un système bidimensionnel orthotrope dont l'angle d'orthotropie est nul (—) et du même système dont l'angle d'orthotropie est  $\theta_{\perp}$  (-.-) dans le même repère supposé fixe. Les axes du plan d'onde ne sont plus nécessairement axes de symétrie géométrique.

d'introduire un facteur 2 au dénominateur ce qui donne :

$$N(\omega) = \frac{S}{4\pi^2} \int_0^{\pi} k^2(\omega, \theta) d\theta \quad (3.20)$$

$$n(\omega) = \frac{S}{2\pi^2} \int_0^{\pi} k(\omega, \theta) \frac{dk(\omega, \theta)}{d\omega} d\theta \quad (3.21)$$

Le lecteur pourra se reporter à Langley [78] pour une démonstration plus complète. Il y est montré notamment que ces relations sont en fait valables pour n'importe quelle structure bidimensionnelle anisotrope.

### 1.2.3 Influence des conditions aux limites sur la densité modale

La méthode de Courant sur laquelle est basée l'étude précédente est une méthode asymptotique qui ne tient pas compte des conditions aux limites : on admet qu'en hautes fréquences la surface que l'on peut associer à un mode dans le  $k$ -espace est toujours  $\pi^2 / (L_x L_y)$ .

En pratique, les premiers nombres d'ondes d'une structure dépendent fortement des conditions aux limites. Par exemple, la rigidité introduite par l'encastrement vient augmenter les premiers nombres d'ondes (et partant, les premières fréquences propres) par rapport à l'appui simple. Au contraire, une structure aux conditions aux limites de type libre présentera des nombres d'ondes plus petits que le cas simplement supporté ou encasté. En toute rigueur, les conditions aux limites distordent, dans le  $k$ -espace, le maillage de points représentant les nombres d'onde. Plus on s'approche des axes  $k_x = 0$  et  $k_y = 0$ , plus les *effets de bords* sont importants. Dès lors, il est nécessaire d'apporter une correction au dénombrement des modes et au calcul de la densité modale proposée par Courant.



**Plaque isotrope** – En se basant sur des considérations géométriques simples dans l'espace des nombres d'onde, Xie *et al.* [127] apportent pour trois types de conditions aux limites – plaque simplement supportée sur ses bords, encastrée sur ses bords, libre sur ses bords – un terme correctif sur le nombre de modes  $N$  d'une plaque rectangulaire isotrope. Nous avons reproduit à la figure 3.4 les  $k$ -espaces pour les différentes conditions aux limites considérées. Dans l'approche adoptée par les auteurs, la surface associée à chaque mode est toujours considérée comme  $\pi^2 / (L_x L_y)$  ; les conditions aux limites influent sur la distance du maillage de points relativement aux axes  $k_x = 0$  et  $k_y = 0$ .

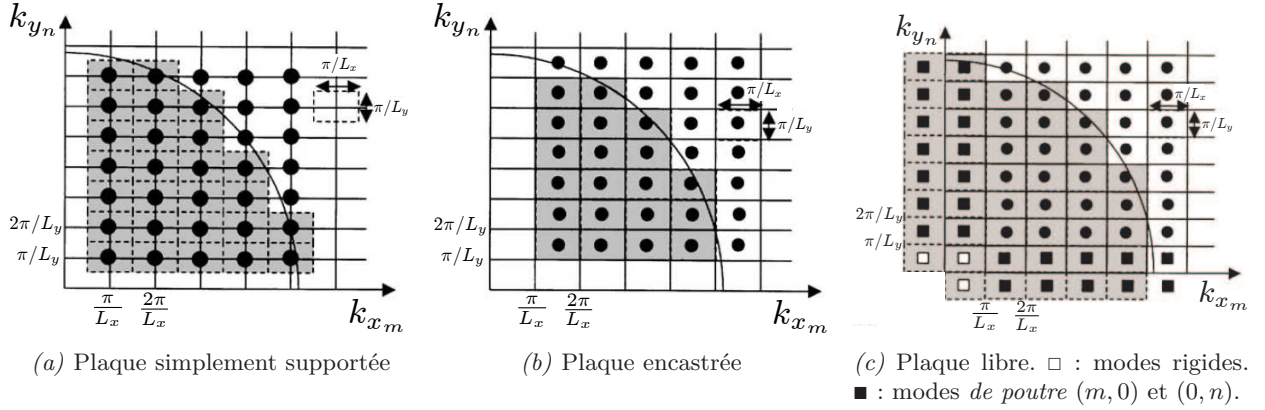


FIG. 3.4 – Influence des conditions aux limites sur la représentation des nombres d'ondes d'une plaque dans le  $k$ -espace, d'après Xie *et al.* [127]. La surface associée à un mode est supposée constante dans chacun des cas. Les conditions aux limites décalent le maillage de points par rapport aux axes  $k_x = 0$  et  $k_y = 0$ .

Le nombre de modes  $N(\omega)$  – correspondant à l'aire grisée sur chacune des figures divisée par l'aire élémentaire du maillage – se calcule dans l'approximation proposée par Xie *et al.* de la façon suivante :

1. Pour une plaque simplement supportée, les nombres d'ondes vérifient  $k_{x_m} L_x = m\pi$  et  $k_{y_n} L_y = n\pi$ . Après soustraction des deux bandes blanches le long des axes  $x$  et  $y$  :

$$N(\omega) = \frac{\frac{1}{4}\pi k^2 - k \left( \frac{\pi}{2L_x} + \frac{\pi}{2L_y} \right) + \frac{\pi}{2L_x} \frac{\pi}{2L_y}}{\frac{\pi}{L_x} \frac{\pi}{L_y}} = \frac{k^2 S}{4\pi} - \frac{kP}{4\pi} + \frac{1}{4} \quad (3.22)$$

où  $P = 2(L_x + L_y)$  est le périmètre de la plaque.

2. Pour une plaque encastrée, les nombres d'ondes vérifient  $k_{x_m} L_x \approx (m + \frac{1}{2})\pi$  et  $k_{y_n} L_y \approx (n + \frac{1}{2})\pi$ . De même, après soustraction des deux bandes blanches le long des axes  $x$  et  $y$  :

$$N(\omega) = \frac{\frac{1}{4}\pi k^2 - k \left( \frac{\pi}{L_x} + \frac{\pi}{L_y} \right) + \frac{\pi}{L_x} \frac{\pi}{L_y}}{\frac{\pi}{L_x} \frac{\pi}{L_y}} = \frac{k^2 S}{4\pi} - \frac{kP}{2\pi} + 1 \quad (3.23)$$

3. Pour une plaque libre, on inclut 3 modes rigides<sup>8</sup> ( $\square$  sur la figure 3.4.c). Ces modes ont un nombre d'onde nul en toute rigueur. Néanmoins pour simplifier le calcul géométrique, Xie *et al.* proposent de les représenter dans le plan  $(k_x, k_y)$  en  $(\frac{\pi}{2L_x}, \frac{\pi}{2L_y})$  pour le mode rigide de translation, et en  $(\frac{-\pi}{2L_x}, \frac{\pi}{2L_y})$  et  $(\frac{\pi}{2L_x}, \frac{-\pi}{2L_y})$  pour les deux modes rigides de rotation selon les deux axes respectifs  $x$  et  $y$ . Enfin, les modes  $(m, 0)$  (respectivement  $(0, n)$ ) que nous appellerons modes *de poutres* ( $\blacksquare$  sur la figure 3.4.c) sont chacun associés à deux modes rigides (translation et rotation) de nombre d'ondes  $k_y$  (respectivement  $k_x$ ) nul. Ils sont représentés respectivement en  $(\frac{m\pi}{2L_x}, \frac{\pm\pi}{2L_y})$  et en  $(\frac{\pm\pi}{2L_x}, \frac{n\pi}{2L_y})$ , également pour simplifier le calcul. Le nombre de modes s'écrit alors, après addition des modes rigides et de poutres :

$$N(\omega) = \frac{\frac{1}{4}\pi k^2 + k(\frac{\pi}{L_x} + \frac{\pi}{L_y})}{\frac{\pi}{L_x} \frac{\pi}{L_y}} = \frac{k^2 S}{4\pi} + \frac{kP}{2\pi} \quad (3.24)$$

On déduit par dérivation des expressions précédentes la densité modale d'une plaque isotrope

$$\text{– simplement supportée :} \quad n(f) = n_\infty - \frac{1}{\sqrt{32\pi}} (\rho h/D)^{\frac{1}{4}} P f^{-\frac{1}{2}} \quad (3.25)$$

$$\text{– encastrée :} \quad n(f) = n_\infty - \frac{1}{\sqrt{8\pi}} (\rho h/D)^{\frac{1}{4}} P f^{-\frac{1}{2}} \quad (3.26)$$

$$\text{– libre :} \quad n(f) = n_\infty + \frac{1}{\sqrt{8\pi}} (\rho h/D)^{\frac{1}{4}} P f^{-\frac{1}{2}} \quad (3.27)$$

où  $n_\infty = \frac{S}{2} \sqrt{\rho h/D}$ .

**Plaque orthotrope spéciale** – Nous étendons maintenant ces calculs au cas des plaques orthotropes. En conservant la même approche que Xie *et al.*, nous introduisons des termes correctifs dans le calcul du nombre de modes. On considère tout d'abord que l'angle d'orthotropie  $\theta_\perp$  est nul (les axes de la plaque sont confondus avec les axes d'orthotropie). On a alors pour une plaque orthotrope simplement supportée :

$$\begin{aligned} N(\omega) &= N_\infty(\omega) - \frac{k(\omega, 0) \frac{\pi}{2L_y} + k(\omega, \pi/2) \frac{\pi}{2L_x} + \frac{\pi}{2L_x} \frac{\pi}{2L_y}}{\frac{\pi}{L_x} \frac{\pi}{L_y}} \\ \Rightarrow N(\omega) &= N_\infty(\omega) - \frac{(\frac{\rho h}{D_1})^{1/4} \sqrt{\omega} \frac{\pi}{2L_y} + (\frac{\rho h}{D_3})^{1/4} \sqrt{\omega} \frac{\pi}{2L_x} + \frac{\pi}{2L_x} \frac{\pi}{2L_y}}{\frac{\pi}{L_x} \frac{\pi}{L_y}} \\ \Rightarrow N(\omega) &= N_\infty(\omega) - \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\rho h}{D_1} \right)^{1/4} \left( 2L_x + 2L_y \left( \frac{D_1}{D_3} \right)^{1/4} \right) \sqrt{\omega} + \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\Rightarrow n(f) = n_\infty - \frac{1}{\sqrt{32\pi}} (\rho h/D_1)^{\frac{1}{4}} P' f^{-1/2} \quad (3.29)$$

où  $n_\infty = \frac{S}{\pi} \sqrt{\frac{\rho h}{D_1}} \left( \frac{D_1}{D_3} \right)^{\frac{1}{4}} F(\pi/2, \alpha)$  et où  $P' = 2[L_x + L_y(D_1/D_3)^{1/4}]$ . En comparant le terme

---

<sup>8</sup>Et non 4 modes rigides, comme il est écrit dans l'article [127]. Un simple raisonnement sur le nombre de liberté d'un solide implique qu'il n'y a que 3 modes rigides incluant des déplacements hors du plan de la plaque.

correctif de l'équation 3.29 à celui de l'équation 3.25 on observe que tout se passe comme si on avait artificiellement multiplié la largeur  $L_y$  de la plaque par  $(D_1/D_3)^{1/4}$  par rapport au cas isotrope ayant pour coefficient de rigidité  $D = D_1$ . Le même calcul se transpose aux deux autres cas de conditions aux limites et on trouve :

$$\text{-- encastrée : } n(f) = n_\infty - \frac{1}{\sqrt{8\pi}} (\rho h/D_1)^{1/4} P' f^{-1/2} \quad (3.30)$$

$$\text{-- libre : } n(f) = n_\infty + \frac{1}{\sqrt{8\pi}} (\rho h/D_1)^{1/4} P' f^{-1/2} \quad (3.31)$$

Dans la mesure où le terme correctif est lié aux modes  $(m, 0)$  et  $(0, n)$  de bords du plan d'onde et que la fréquence qui leur est associée ne dépend ni de  $D_2$  ni de  $D_4$  (voir la relation 3.5), il est normal que  $D_2$  et  $D_4$  n'apparaissent pas dans ces expressions.

La figure 3.5 présente pour le cas de la plaque en épicéa considérée plus haut les densités modales fonction de la fréquence et pour les trois types de conditions aux limites. Ignorer les termes

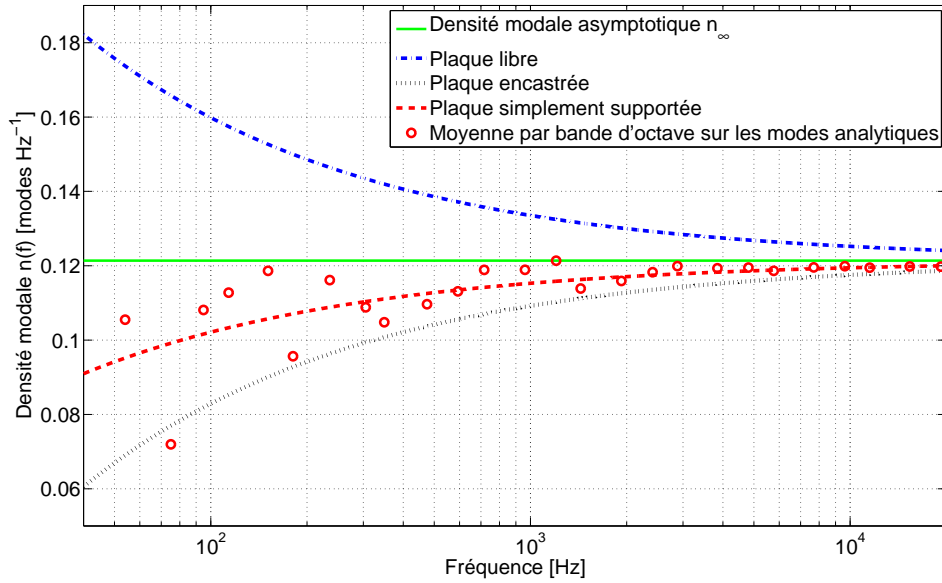


FIG. 3.5 – Influence des conditions aux limites sur la densité modale d'une plaque mince orthotrope en épicéa ( $L_x = 1.39$  m,  $L_y = 0.91$  m,  $h = 8$  mm,  $\theta_\perp = 0$ ). Dans les basses fréquences, la densité modale dépend de manière importante des conditions aux limites. Les  $\circ$  sont estimés par moyenne par bandes d'octave sur les fréquences propres de la plaque simplement supportée calculées analytiquement.

correctifs sur la densité modale crée une erreur de l'ordre de 15% à 100 Hz dans le cas de la plaque simplement supportée et de plus de 30% pour des conditions de type libre ou encastrée. Le calcul asymptotique de la densité modale  $n_\infty$  n'est valable qu'en hautes fréquences : pour cette plaque l'erreur est inférieure à 5% pour des fréquences supérieures à 1 kHz dans le cas de l'appui simple, et supérieures à 5 kHz pour les autres conditions aux limites. On a également indiqué sur la figure les

densités modales *moyennes* estimées à partir des fréquences propres analytiques (équation 3.5) de la plaque simplement supportée. Ces densités modales sont calculées par moyenne sur des bandes d'octave. Elles suivent bien la courbe correspondante sur tout le spectre en présentant le même comportement asymptotique en hautes fréquences.

**Plaque orthotrope avec  $\theta_\perp \neq 0$**  – À titre indicatif, nous nous proposons d'étendre maintenant le calcul aux plaques orthotropes "non spéciales". Posons :

$$\tilde{D}(\theta, \theta_\perp) = D_1 \cos^4(\theta - \theta_\perp) + D_3 \sin^4(\theta - \theta_\perp) + (D_2 + D_4) \cos^2(\theta - \theta_\perp) \sin^2(\theta - \theta_\perp) \quad (3.32)$$

La relation de dispersion 3.18 peut alors se mettre de la forme  $\tilde{D}(\theta, \theta_\perp) k^4(\omega, \theta) = \rho h \omega^2$ . Si nous supposons toujours comme vérifiée l'hypothèse que les nombres d'ondes  $k_x$  et  $k_y$  peuvent être approchés par  $m\pi/L_x$  et  $n\pi/L_y$ , le calcul du nombre de modes se fait comme précédemment mais les termes correctifs dépendent maintenant de l'angle d'orthotropie. Pour des conditions aux limites de type simplement supporté :

$$\begin{aligned} N(\omega) &= N_\infty(\omega) - \frac{\left(\frac{\rho h}{\tilde{D}(0, \theta_\perp)}\right)^{1/4} \sqrt{\omega} \frac{\pi}{2L_y} + \left(\frac{\rho h}{\tilde{D}(\pi/2, \theta_\perp)}\right)^{1/4} \sqrt{\omega} \frac{\pi}{2L_x} + \frac{\pi}{2L_x} \frac{\pi}{2L_y}}{\frac{\pi}{L_x} \frac{\pi}{L_y}} \\ \Rightarrow N(\omega) &= N_\infty(\omega) - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\rho h}{\tilde{D}(0, \theta_\perp)}\right)^{\frac{1}{4}} \left[ 2L_x + 2L_y \left(\frac{\tilde{D}(0, \theta_\perp)}{\tilde{D}(\pi/2, \theta_\perp)}\right)^{\frac{1}{4}} \right] \sqrt{\omega} \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\Rightarrow n(f) = n_\infty - \frac{1}{\sqrt{32\pi}} \left(\frac{\rho h}{\tilde{D}(0, \theta_\perp)}\right)^{\frac{1}{4}} \left[ 2L_x + 2L_y \left(\frac{\tilde{D}(0, \theta_\perp)}{\tilde{D}(\pi/2, \theta_\perp)}\right)^{\frac{1}{4}} \right] f^{-1/2} \quad (3.34)$$

De même, on obtient les relations suivantes pour le cas d'une plaque

$$\text{– encastree : } n(f) = n_\infty - \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \left(\frac{\rho h}{\tilde{D}(0, \theta_\perp)}\right)^{\frac{1}{4}} \left[ 2L_x + 2L_y \left(\frac{\tilde{D}(0, \theta_\perp)}{\tilde{D}(\pi/2, \theta_\perp)}\right)^{\frac{1}{4}} \right] f^{-1/2} \quad (3.35)$$

$$\text{– libre : } n(f) = n_\infty + \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \left(\frac{\rho h}{\tilde{D}(0, \theta_\perp)}\right)^{\frac{1}{4}} \left[ 2L_x + 2L_y \left(\frac{\tilde{D}(0, \theta_\perp)}{\tilde{D}(\pi/2, \theta_\perp)}\right)^{\frac{1}{4}} \right] f^{-1/2} \quad (3.36)$$

Dans les trois équations 3.34–3.36,

- lorsque  $\theta_\perp = a\pi$  (avec  $a \in \mathbb{N}$ ), c'est à dire lorsque les axes d'orthotropie coïncident avec les bords de la plaque correspondants ( $D_1$  dans le sens de la longueur  $x$  et  $D_3$  dans le sens de la largeur  $y$ ), on retrouve bien les équations 3.29–3.31 de la plaque orthotrope spéciale.
- lorsque  $\theta_\perp = \pi/2 + a\pi$  (avec  $a \in \mathbb{N}$ ), c'est à dire lorsque les axes d'orthotropie de la plaque sont inversés, on retrouve une nouvelle fois les équations 3.29–3.31 où l'on a remplacé cette fois la longueur  $L_x$  par la largeur  $L_y$  (ou, ce qui revient au même,  $D_1$  par  $D_3$ ).
- lorsque  $D = D_1 = D_3$  et  $D_2 + D_4 = 2D$ , ce qui correspond au cas d'une plaque isotrope, on retrouve bien les équations 3.25–3.27 ; ceci pour tout  $\theta_\perp$ .

**Cas du piano** – La table d'harmonie montée sur l'instrument est *contrainte* aux bords.

Les conditions aux limites sont de type simplement supporté ou encastéré : la densité modale est inférieure à la valeur asymptotique et tend vers celle-ci en hautes fréquences. L'angle d'orthotropie n'a pas de conséquence notable sur la densité modale. Pour notre table étudiée à la section 2 on a  $\theta_{\perp} = 33^{\circ}$ . À 100 Hz par exemple, si l'on prend les données de la plaque en épicéa étudiée ci-dessus, on a dans le cas encastéré  $n = 0.102$  modes  $\text{Hz}^{-1}$  si l'orthotropie est *spéciale* contre  $n = 0.104$  modes  $\text{Hz}^{-1}$  pour  $\theta_{\perp} = 33^{\circ}$ . L'influence de l'angle d'orthotropie sur la densité modale est donc probablement dans l'ordre des erreurs de modélisation.

## 2 Estimation modale d'une table d'harmonie – Application de l'analyse modale haute résolution

Dans cette section, nous appliquons la méthode temporelle d'identification modale développée au chapitre 2 à une table d'harmonie de piano droit dans le but d'estimer les paramètres modaux et la densité modale de la structure. Le piano est un piano *ATLAS* de moyenne gamme. Il est représenté à la figure 3.6, vu de l'arrière. La table est rectangulaire de dimensions  $1.39 \times 0.91 \text{ m}^2$



FIG. 3.6 – Vue de l'arrière du piano droit ATLAS étudié.

et d'épaisseur (mesurée au centre) d'environ 8 mm. Elle est raidie par 11 barres perpendiculaires au fil du bois. L'espacement inter-raidisateurs moyen est d'environ 13 cm. L'orientation du fil du bois par rapport au côté parallèle au clavier est d'environ  $33^{\circ}$ . On a rajouté sur la figure les deux chevalets non visibles (collés de l'autre côté de la table). Les deux zones triangulaires dans deux des coins sont appelées *mouchoirs*. Les deux barres épaisses (le plus souvent en sapin) servent d'appuis aux raidisseurs, et *bloquent* les vibrations qui ont lieu dans ces zones de la table.

Deux études modales de la table sont menées. La première consiste en une analyse modale similaire aux études effectuées sur les plaques en aluminium au chapitre précédent : l’excitation est fournie par marteau d’impact. Au-dessus de 550 Hz, l’identification des paramètres modaux de la table n’est plus satisfaisante car le rapport signal à bruit des réponses impulsionnelles est trop faible (35 dB). Pour nous affranchir de cette limitation, nous avons alors procédé à une seconde étude par excitation continue, comme suggéré au 4.2 du chapitre 2.

Avant de présenter en détail ces deux études et les résultats de la méthode d’analyse modale haute résolution aux sections 2.2 et 2.3, il est nécessaire de vérifier dans quelle mesure l’approximation linéaire de la réponse dynamique est satisfaite pour cette structure. C’est l’objet de la section suivante.

## 2.1 Linéarité de la réponse dynamique

Nous nous intéressons ici aux phénomènes non linéaires d’une structure bidimensionnelle liés à la *non-linéarité géométrique* consécutive au mouvement de fort amplitude [31]. En particulier lorsque le déplacement transversal d’une plaque atteint une amplitude de l’ordre de son épaisseur, un modèle linéaire n’est plus suffisant pour prédire le comportement de la structure [118]. Dans le cas du piano, le déplacement de la table mesuré au chevalet reste considérablement plus petit que son épaisseur, même lorsque le jeu est *ff* et dans la tessiture grave de l’instrument. Askenfelt et Jansson [7] ont mesuré sur un piano à queue de concert des déplacements au chevalet inférieurs au centième de millimètre – au maximum  $6 \cdot 10^{-6}$  m dans l’intervalle fréquentiel [80-300 Hz] et en jeu *ff*, voir la figure 3.7 – soit moins de  $10^{-3}$  fois l’épaisseur de la table (9 mm). Le mouvement de

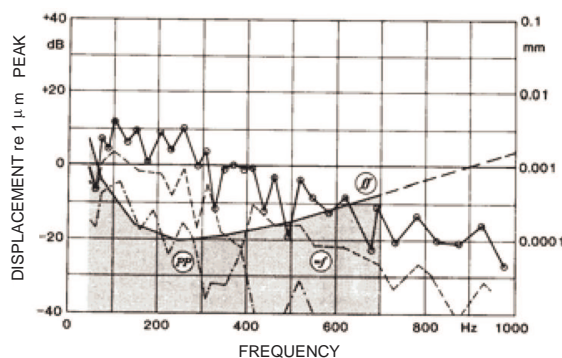


FIG. 3.7 – Déplacement au chevalet d’un piano à queue de concert pour un jeu *pp* (---), *mf* (—) et *ff* (— avec ●) pour les notes  $\text{Do}_1$  à  $\text{Si}_4$  (fréquences fondamentales 60-950 Hz), d’après Askenfelt et Jansson [7]. La région située sous le seuil de sensation des vibrations au bout des doigts (surface de contact de 28 mm) est représentée grisée.

grande amplitude est loin d’être atteint ; on peut donc légitimement supposer que les vibrations de la table sont linéaires.

Sur le plan expérimental, très peu d’études ont été dédiées à la mesure de la linéarité des vibrations des tables d’harmonies. La plus concluante semble être celle menée par Hundley *et al.* [67]. Les auteurs suggèrent qu’une des causes possibles des multiples décroissances des sons de pianos



serait la transformation non linéaire de l'énergie mécanique en énergie acoustique lors du *transfert corde - chevalet - table - air environnant*. Une mesure directe de la linéarité est obtenue en mettant en vibration un triplet de cordes à l'aide d'un aimant excitant les cordes à leur fréquence fondamentale et pour différents niveaux de sollicitation. La courbe représentée à la figure 3.8(a) donne le niveau de pression mesurée près du piano placé en environnement anéchoïque en fonction de l'amplitude d'excitation du triplet **Si<sub>2</sub>** à la fréquence du fondamental (250 Hz). La linéarité de la pression acoustique est excellente et la pente est très proche de 1 sur un intervalle de plus de 40 dB : aucun phénomène non linéaire n'est présent. Dans un second temps, Hundley *et al.* ont mesuré l'enveloppe temporelle du son de piano pour différentes amplitudes d'excitation de la touche (par lâcher de différents poids de 100 à 800 grammes). Répétée sur un grand nombre de touches, aucune dépendance du facteur d'amortissement avec l'amplitude d'impact du marteau n'a été trouvée : les enveloppes temporelles sont presque identiques (voir la figure 3.8(b) pour un exemple de la mesure pour la note **Do<sub>4</sub>** de fréquence fondamentale 523 Hz environ). L'argumentaire de Hundley *et al.* – s'il existait une non-linéarité, le facteur d'amortissement  $\alpha$  dépendrait du niveau d'excitation – n'est valable que pour une non-linéarité de raideur. Une non-linéarité géométrique se traduirait par l'introduction de termes quadratique, cubique, etc. et donc par des termes de décroissance en  $2\alpha$ ,  $3\alpha$ . Les courbes montrées ne permettent donc pas véritablement de conclure.

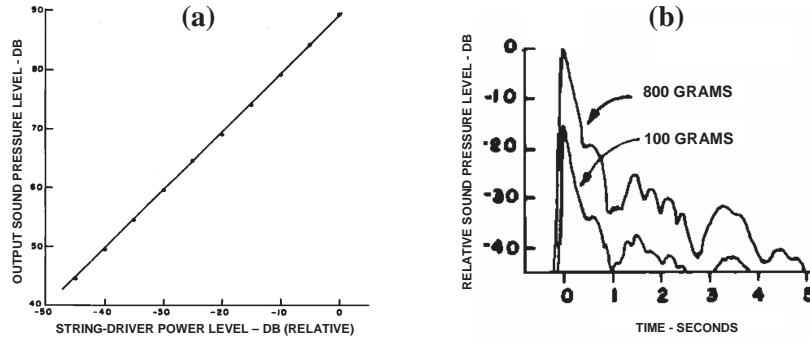


FIG. 3.8 – Linéarité de la réponse pour le *transfert corde - chevalet - table - air environnant* d'après Hundley *et al* [67].

### 2.1.1 Méthode de séparation linéaire / non linéaire (Farina, Rébillat)

Dans le but de quantifier expérimentalement la (non-)linéarité de notre table de piano droit nous avons mis en œuvre la méthode de mesure par excitation continue proposée par Farina[53]. L'excitation par sinus glissant (sweep) logarithmique d'un système dont le comportement est faiblement non linéaire permet de séparer la contribution de la réponse linéaire de la contribution de chacun des harmoniques issus de la distorsion non linéaire (voir Rébillat *et al.* [101] pour l'exposé de la démonstration).

Supposons tout d'abord le système strictement linéaire et soumis à une excitation de type sweep linéaire de durée  $T$  secondes, de pulsations initiale  $\omega_1$  et finale  $\omega_2$ . L'expression du sweep

est [53] :

$$x(t) = \sin[\phi(t)] \quad \text{avec} \quad \phi(t) = \omega_1 t + \frac{\omega_2 - \omega_1}{T} \frac{t^2}{2} \quad (3.37)$$

Notons  $y$  le signal mesuré en réponse à l'excitation  $x$ . La méthode de calcul de la réponse impulsionnelle (RI) du système repose sur la propriété particulière du sweep linéaire : son inverse  $f$  dans le produit de convolution est connu explicitement, c'est le retourné temporel de lui-même  $f(t) = x(-t)$ . Ainsi, la réponse impulsionnelle  $h$  qui s'obtient par convolution de  $y$  avec  $f$  se calcule simplement par :

$$h(t) = y(t) * f(t) = y(t) * x(-t) \quad (3.38)$$

Supposons maintenant que le comportement du système soit faiblement non linéaire. Sa réponse à un sweep contient alors des harmoniques à des fréquences multiples de la fréquence d'excitation (voir la figure 3.9 par exemple). La méthode précédente ne permet pas de séparer la

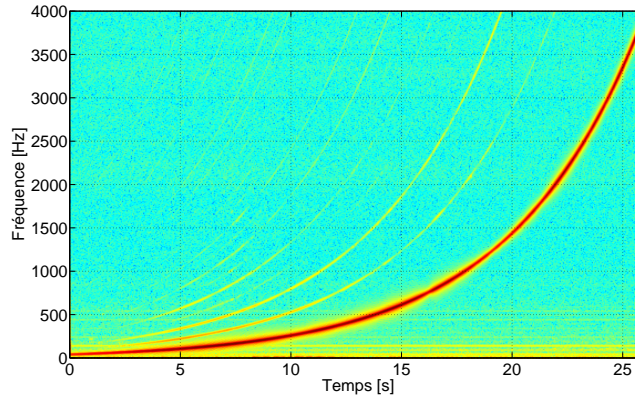


FIG. 3.9 – Spectrogramme de la réponse du système  $\{\text{haut-parleur, chambre}\}$ . (la taille des fenêtres de calcul des spectres successifs est de 0.1 s, avec un recouvrement fixé à 50% entre chaque FFT).

contribution de la réponse linéaire des contributions non linéaires. Farina propose alors d'utiliser comme signal d'excitation un sinus glissant dont la fréquence varie exponentiellement (appelé sweep logarithmique). Son expression est [53] :

$$x(t) = \cos[\phi(t)] \quad \text{avec} \quad \phi(t) = \frac{\omega_1 T}{\ln(\omega_2/\omega_1)} \left( e^{\frac{t}{T} \ln(\omega_2/\omega_1)} - 1 \right) - \pi/2 \quad (3.39)$$

Ce type de signal vérifie la relation fondamentale [101] :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \cos[k\phi(t)] &= \cos([\phi(t + \Delta t_k)]) \\ \text{où } \Delta t_k &= \frac{T \ln k}{\ln(\omega_2/\omega_1)} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Ainsi, un sweep logarithmique dont la phase a été multipliée par  $k$  n'est autre que le sweep original en avance de  $\Delta t_k$  dans le domaine temporel. Rébillat *et al.* ont montré de plus qu'un sweep



logarithmique élevé à la puissance  $n$ ,  $x^n(t) = \cos^n[\phi(t)]$ , peut s'écrire comme une combinaison linéaire des  $\{\cos[k\phi(t)]_{k \in [1,n]}\}$  en utilisant les polynômes de Tchebychev. Cette propriété est à la base de la méthode de mesure. Après convolution du signal mesuré  $y(t)$  par  $x(-t)$ , on obtient comme précédemment la réponse impulsionnelle linéaire précédée cette fois des combinaisons linéaires des réponses impulsionnelles non linéaires (voir la figure 3.10). Si le temps d'excitation est suffisamment grand, les réponses ne se recouvrent pas. Un simple fenêtrage temporel permet alors de les extraire<sup>9</sup>.

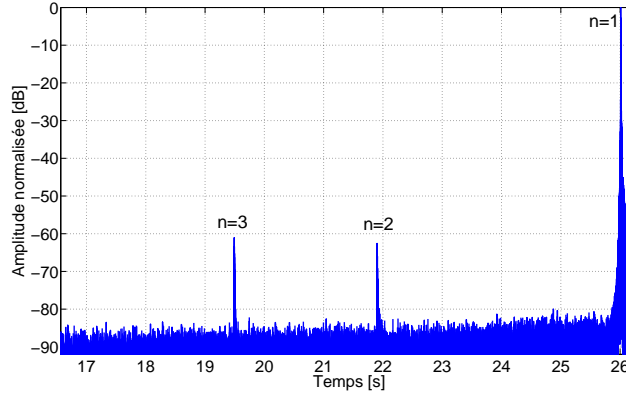


FIG. 3.10 – Résultat de la déconvolution pour la mesure effectuée dans la chambre seule. La réponse impulsionnelle linéaire est précédée de deux réponses impulsionnelles non linéaires (la RI non linéaire d'ordre 4 – qui devrait apparaître au temps  $t = 17.8$  s – est noyée dans le bruit).

### 2.1.2 Résultats

Le piano est placé dans une chambre semi-anéchoïque. Les cordes de l'instrument sont étouffées en différents points à l'aide de bandes de mousse et de feutre placées entre celles-ci ou enroulées autour d'elles. Deux systèmes sont étudiés successivement :  $\{\text{haut-parleur, chambre}\}$  puis  $\{\text{haut-parleur, piano, chambre}\}$  dans les mêmes conditions de mesure. Le but est de quantifier la (non-)linéarité de la table d'harmonie. L'excitation électrique du haut-parleur est un sinus glissant logarithmique entre 50 Hz et 4 kHz d'une durée de 26 s à une fréquence d'échantillonnage de 40 kHz. L'amplitude du haut-parleur a été ajustée (au début de l'étude) de façon à obtenir un déplacement de la table au point de mesure qui corresponde à la situation de jeu *ff* (voir la figure 3.7) ; soit environ  $0.9 \cdot 10^{-6}$  m à 370 Hz.

Dans un premier temps on mesure la réponse de la chambre sans le piano (premier système) à l'aide d'un microphone prépolarisé 1/2" (*Brüel & Kjaer 4947 – pressure-field*) placé à proximité du haut-parleur (*BOSE - 802 Series II*). Le spectrogramme de la réponse de la chambre est donné à la figure 3.9. Nous attribuons la distorsion clairement visible au haut-parleur. Le résultat de la

<sup>9</sup>Les auteurs montrent dans [101] qu'en toute rigueur toutes les composantes d'ordre  $n + 2k$  influent sur la composante d'ordre  $n$ . Or, pour le système que nous étudions, les contributions non linéaires d'ordres supérieurs ou égaux à 4 sont très faibles et n'influencent pas sur les ordres inférieurs. En pratique, il suffit donc – pour retrouver la réponse impulsionnelle linéaire – d'effectuer dans le domaine temporel une compensation de l'ordre 3 sur l'ordre 1.

déconvolution est donné à la figure 3.10 et les spectres des RI linéaire et non linéaires identifiées sont présentés à la figure 3.11. Pour comparer l’importance relative des différents harmoniques, on a effectué une mise à l’échelle fréquentielle. Ainsi, pour une fréquence  $f$  donnée, il est possible de lire l’amplitude des harmoniques 2, 3 et 4 par simple translation verticale. Excepté pour des fréquences inférieures à 500 Hz où la distorsion du haut-parleur est importante, la contribution des harmoniques est d’environ 50-60 dB au-dessous de la contribution linéaire.

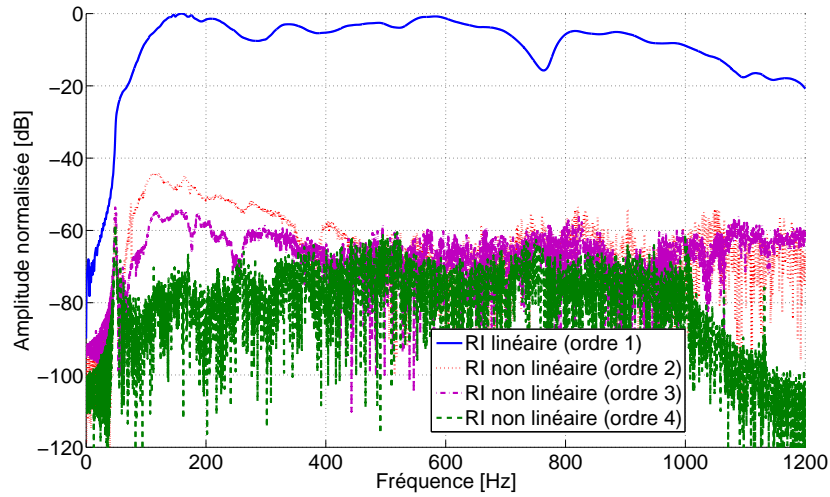


FIG. 3.11 – Spectres des RI linéaire et non linéaires du système  $\{\text{haut-parleur}, \text{chambre}\}$  après mise à l’échelle fréquentielle.

Dans un second temps, nous considérons le système  $\{\text{haut-parleur}, \text{piano}, \text{chambre}\}$ . L’accélération de la table est mesurée avec un accéléromètre (*Brüel & Kjaer – ENDEVCO, Isotron 2250A-10*) collé à égale distance de deux raidisseurs successifs et à environ 10 cm du point de couplage du triplet  $\text{Fa}\sharp_3$  (de fréquence fondamentale environ 370 Hz) et du chevalet. Comme précédemment, les contributions non linéaires sont séparées de la réponse impulsionnelle linéaire dans les mêmes conditions de mesure (même signal d’excitation, même position du haut-parleur dans la chambre...). Nous représentons sur un même spectre (figure 3.12), les contributions linéaires et les contributions non linéaires d’ordre 2 des deux systèmes étudiés (avec et sans piano). Aucune distorsion supplémentaire à celle due au haut-parleur n’est mesurée sur la table d’harmonie. On peut en conclure que la non-linéarité intrinsèque de la table, pour ce niveau d’excitation, est inférieure d’au-moins 50 dB à la contribution linéaire.

Il ressort de cette étude qu’un modèle linéaire suffit pour rendre compte du comportement vibratoire d’une table d’harmonie en situation de jeu. Lors de la seconde étude modale (par haut-parleur), les niveaux d’excitation seront comparables à ceux atteints ici et seule la contribution linéaire sera analysée. L’excitation impulsionnelle, ordinaire, ne permet pas la séparation des contributions linéaire / non-linéaire. Néanmoins, au vu des petites amplitudes de déplacements causés par les impacts sur la table (typiquement inférieures à  $8 \cdot 10^{-6}$  m soit moins d’un centième de l’épaisseur de la table) et des résultats présentés dans cette section, on considèrera également

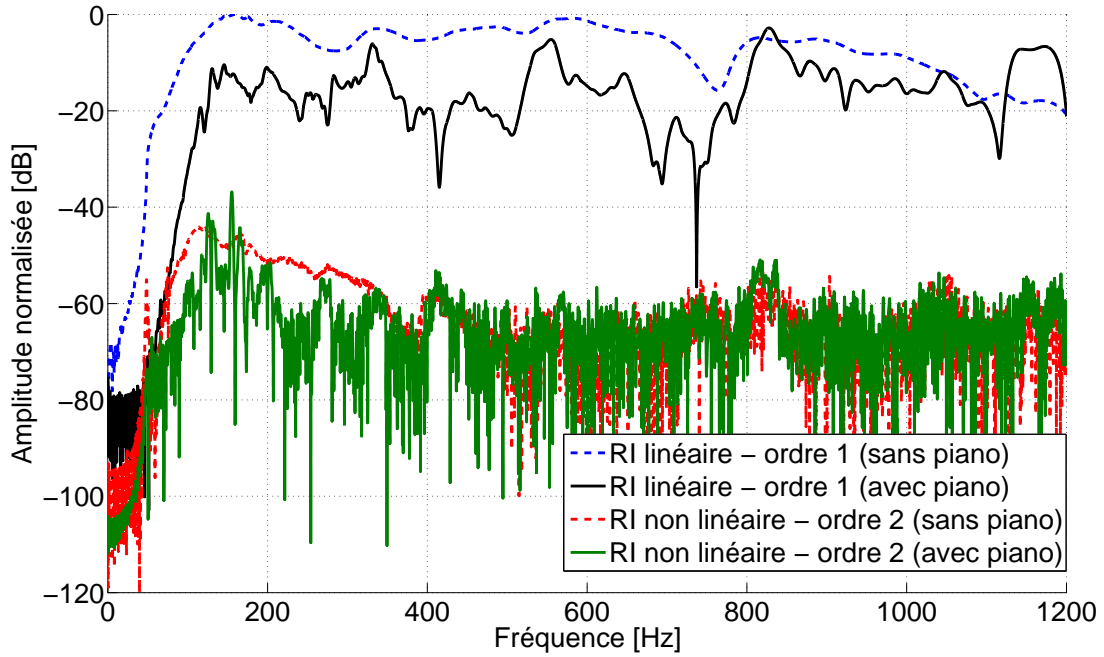


FIG. 3.12 – Comparaison des non-linéarités des deux systèmes  $\{\text{haut-parleur}, \text{chambre}\}$  et  $\{\text{haut-parleur}, \text{piano}, \text{chambre}\}$  entre 0 et 1200 Hz.

dans ce cas l'approximation linéaire comme vérifiée.

## 2.2 Paramètres modaux estimés entre 0 et 550 Hz (excitation impulsionnelle)

La première étude modale vise à estimer les fréquences, amortissement et déformées modales des premières résonances de la table, par excitation impulsionnelle. Les impacts sont portés aux nœuds d'un maillage rectangulaire de  $12 \times 10$  points régulièrement espacés. Le pas est d'environ 12 cm suivant l'axe horizontal appelé  $(O, x')$  et 9 cm suivant l'axe vertical  $(O, y')$  (voir la figure 3.13). La table est montée sur l'instrument dont les cordes sont étouffées et qui est placé comme précédemment dans la chambre semi-anéchoïque. Le marteau d'impact est un *Kistler – type 9722A* dont la masse totale fait 230 grammes; un choc lourd et puissant est nécessaire pour exciter efficacement les premières résonances de la structure encastrée dans sa ceinture et mise en charge. Cinq accéléromètres sont collés sur la table (voir la figure 3.13).  $\mathbf{A}_1$  et  $\mathbf{A}_5$  sont des accéléromètres *Brüel & Kjaer – ENDEVCO, Isotron 2250A-10*;  $\mathbf{A}_2$ - $\mathbf{A}_4$  sont des accéléromètres *Brüel & Kjaer – type 4393*. La multiplicité des accéléromètres placés dans différentes zones de la structure permet d'assurer (en première approximation) que l'analyse modale ne sera pas *aveugle* pour certains modes. En particulier, l'accéléromètre  $\mathbf{A}_1$  est situé dans la zone inférieure droite de la table d'harmonie de façon à éviter les lignes nodales des premiers modes (voir les déformées sur les figures 3.17–3.19). Pour chacune des mesures ( $120 \times 5$  réponses au total), nous reconstruisons la réponse impulsionnelle de la structure que nous analysons avec la méthode haute résolution. Chacune des déformées modales présentées correspond à la moyenne des cinq déformées mesurées

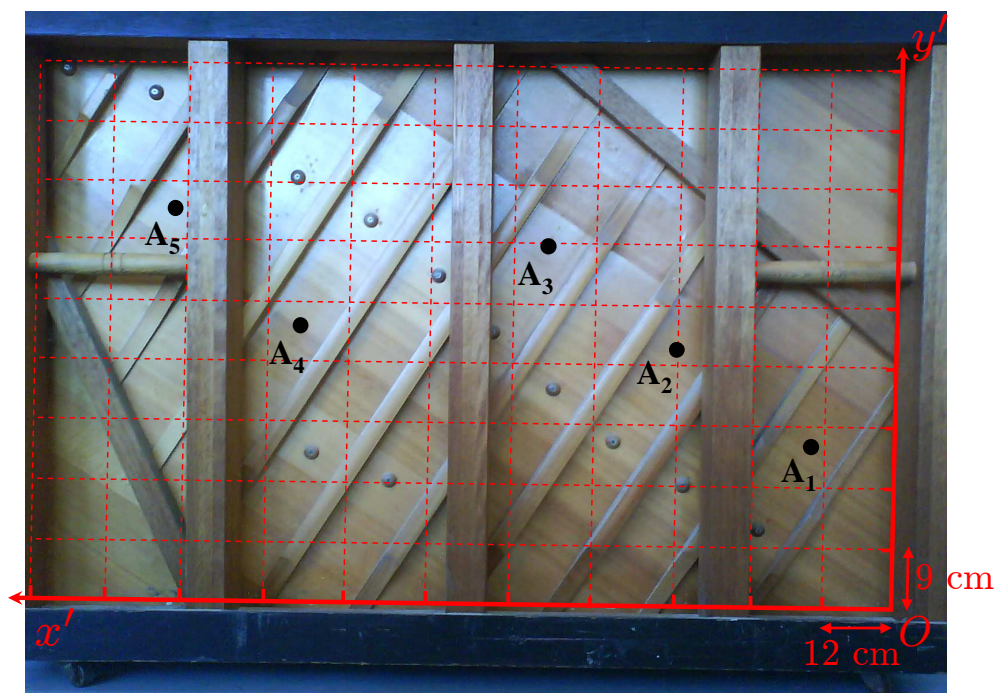


FIG. 3.13 – Maillage expérimental de la table et emplacement des accéléromètres, pour l'analyse modale par excitation impulsionnelle.

par chacun des cinq accéléromètres, pondérée par l'amplitude associée à chaque accéléromètre.

### 2.2.1 Fréquences et amortissements modaux

Pour avoir une première idée de l'ordre de grandeur des fréquences et amortissements des premières résonances de la table d'harmonie nous effectuons une première analyse *grossière* large bande des réponses impulsionnelles. Après un simple filtrage passe-bande [50-600] Hz, chacune des réponses est analysée avec l'algorithme ESPRIT. L'ordre de modélisation  $K$  est ici choisi en fonction de l'ordre de grandeur de la densité modale des tables d'harmonies de piano droit (environ  $0.04\text{-}0.05$  modes  $\text{Hz}^{-1}$  en basses fréquences, voir l'étude bibliographique du chapitre 1). Nous surestimons cette valeur et nous fixons finalement le nombre de composantes réelles à rechercher égal à 35 (le nombre de composantes complexes  $K$  est donc égal à 70). Nous représentons les  $35 \times 600$  estimations ESPRIT dans le plan fréquence-amortissement à la figure 3.14(a). Les groupes de points que l'on voit apparaître correspondent aux modes de la structure. Entre 80 et 550 Hz on peut ainsi reconnaître une vingtaine de nuages de points, mais la grande dispersion des résultats ne permet pas d'en tirer des valeurs précises des fréquences et amortissements modaux.

Afin d'augmenter les performances de la méthode haute résolution, l'étape de préconditionnement des réponses impulsionnelles est indispensable (voir le schéma-bloc de la méthode à la figure 2.3). Ici nous conditionnons les signaux de manière à ce que seule une sinusoïde soit recherchée par ESPRIT, à chaque fois. Pour cela, nous appliquons aux réponses impulsionnelles un filtre

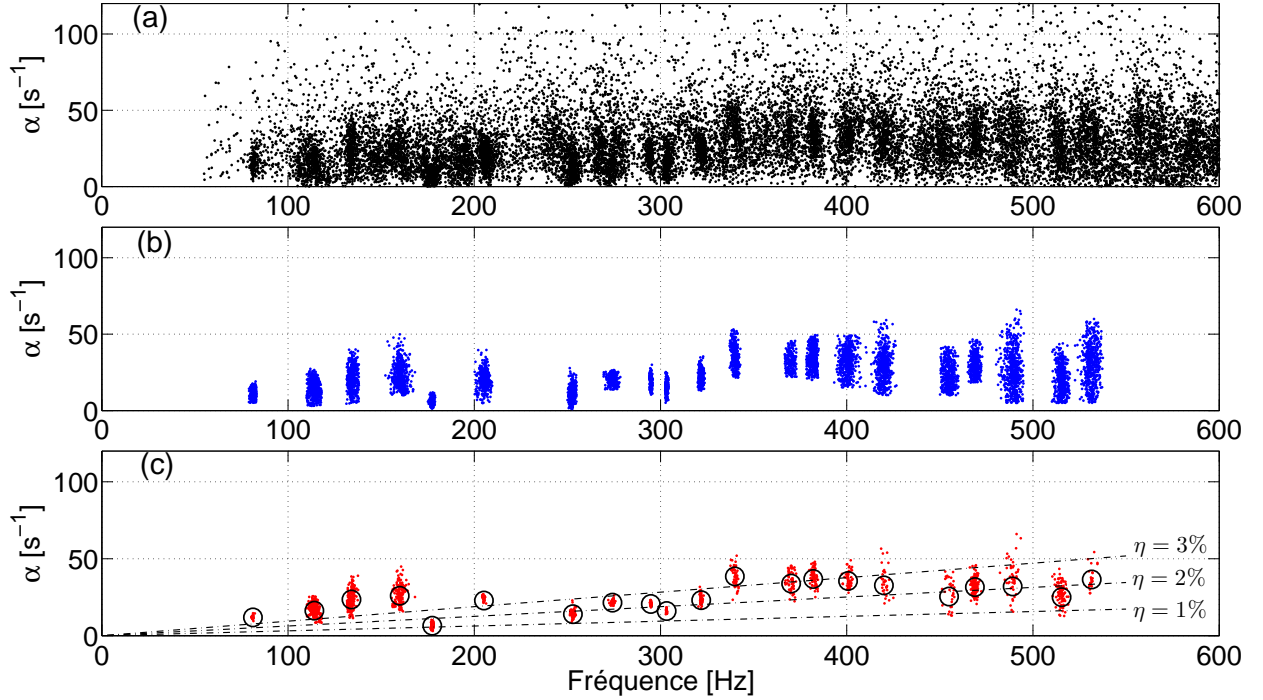


FIG. 3.14 – Résultats de l'analyse modale haute résolution sur la bande de fréquence [0-600] Hz. Plan fréquence–amortissement. (a) première analyse *grossière* (simple filtrage large bande). (b) résultats de la série d'analyses par bandes étroites, centrées autour de chaque nuage de points. (c) idem que précédemment après suppression des estimations moins précises des régions nodales.  $\circ$  : paramètres modaux retenus.  $---$  : facteur de pertes constant ( $\eta$  de 1 à 3 %).

passe-bande *étroit*<sup>10</sup> centré successivement autour de chaque nuage de points. Le critère ESTER permet de s'assurer que l'ordre de modélisation de chaque réponse impulsionnelle filtrée puis démodulée est bien  $K = 2$ . La figure 3.15 illustre le gain apporté par cette étape pour les cinq modes de la bande fréquentielle [230–330] Hz. Les trois plans fréquence-amortissement, fréquence-phase et fréquence-amplitude sont représentés. Les figures du dessus correspondent aux résultats bruts (filtrage large bande seulement) ; celles du dessous correspondent à la seconde série d'analyse, après filtrage par bandes étroites et démodulation. Les résultats sont beaucoup plus satisfaisants ; le gain en résolution est particulièrement visible sur la phase. À titre d'illustration, nous donnons à la figure 3.16 les résultats du critère ESTER. On peut noter que la détection est beaucoup plus évidente après préconditionnement ( $J > 5 \cdot 10^4$ ) qu'avant ( $J \approx 6 \cdot 10^2$ ).

Les fréquences et amortissements estimés de la sorte jusqu'à 550 Hz sont reportés à la figure 3.14(b). Pour certains modes, la dispersion est encore assez grande : ceci est dû aux estimations moins précises des régions nodales. Une manière d'augmenter efficacement la résolution consiste alors à supprimer les estimations de plus faible énergie – le seuil est fixé arbitrairement à 25% de l'énergie maximale. On obtient finalement la figure 3.14(c). Les fréquences et amor-

<sup>10</sup>Le filtre est choisi à réponse impulsionnelle finie (RIF), à phase linéaire. Il est synthétisé par la méthode des fenêtres ; nous avons choisi la fenêtre de Blackmann pour sa forte réjection des lobes secondaires (à au moins 75 dB en dessous de la bande passante [40]). La largeur des bandes passantes à -6 dB des filtres utilisés ici varie entre 5 et 10 Hz.

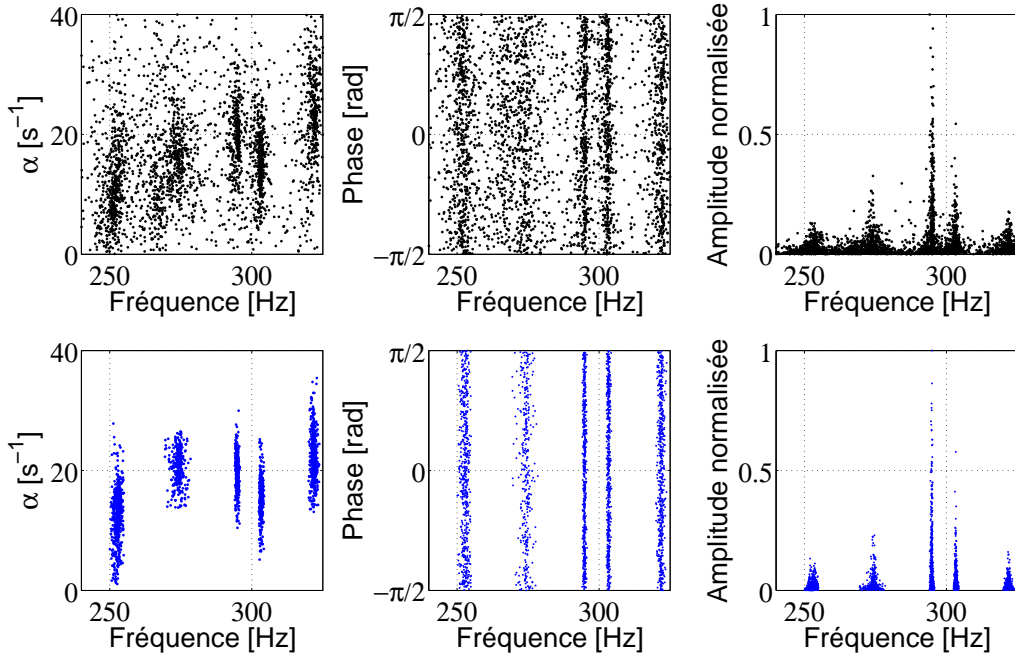


FIG. 3.15 – Résultats de l'analyse modale haute résolution pour les cinq modes de la bande fréquentielle [230–330] Hz. Plans fréquence–amortissement, fréquence–phase et fréquence–amplitude. Avant préconditionnement (ligne du dessus) et après préconditionnement (ligne du dessous).

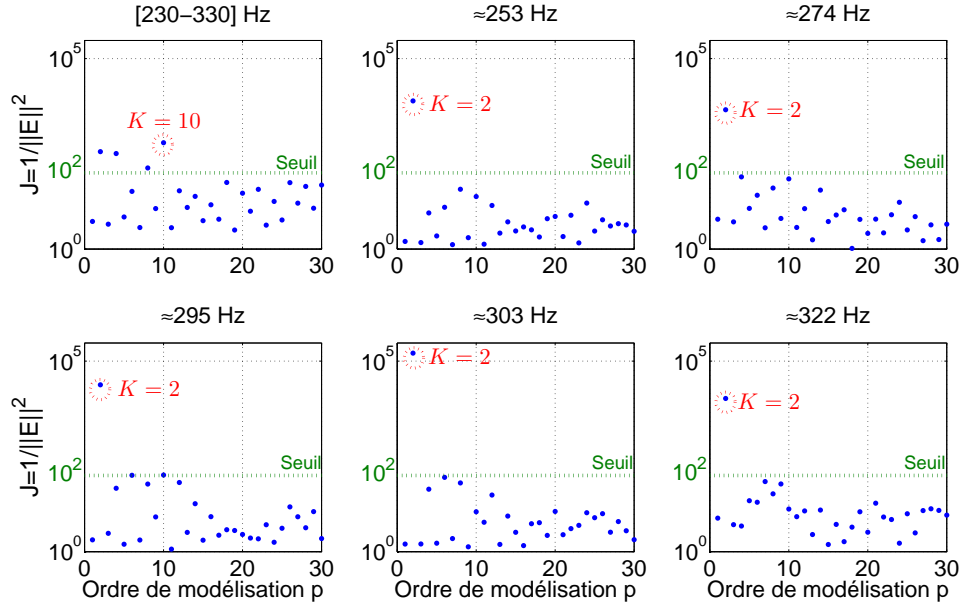


FIG. 3.16 – Exemples d'application du critère ESTER pour la bande fréquentielle [230–330] Hz ( $K = 10$  est détecté) et pour chacun des cinq modes après préconditionnement ( $K = 2$  est détecté à chaque fois). Le seuil est choisi arbitrairement au-dessus du bruit (ici pour  $J = 10^2$ ).

tissements des 21 modes retenus par cette méthode sont récapitulés au tableau 3.1 et rajoutés sur la figure (○). Pour chaque mode, les valeurs correspondent aux moyennes des 600 estimations



pondérées par les amplitudes modales correspondantes de manière à donner moins d’importance aux estimations moins précises des régions nodales. Mis à part les quatre premières résonances,

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f$ [Hz]	81.1	114.1	134.1	159.0	177.4	205.2	252.9	274.2	294.8	303.3	321.8
$\alpha$ [s <sup>-1</sup> ]	11.9	16.3	23.5	25.9	6.5	22.9	14.0	21.5	20.6	16.0	23.1
$\eta$ en %	4.7	4.5	5.6	5.2	1.2	3.6	1.8	2.5	2.2	1.7	2.3

	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$f$ [Hz]	339.9	370.1	382.0	400.7	420.0	454.9	468.8	489.1	515.4	531.6
$\alpha$ [s <sup>-1</sup> ]	38.5	33.9	36.8	35.6	32.7	25.4	31.6	32.0	25.0	36.6
$\eta$ en %	3.6	2.9	3.1	2.8	2.5	1.8	2.2	2.1	1.5	2.2

TAB. 3.1 – Fréquences et facteurs d’amortissement modaux retenus. La troisième ligne correspond aux facteurs de pertes  $\eta = \frac{\alpha}{\pi f}$ .

les amortissements estimés sont très proches des pertes internes du bois (environ 1–3 %, voir le tableau 1.1 ou la figure E.1) ce qui permet de juger de l’acuité des résultats de l’analyse modale. On peut faire l’hypothèse que la source supplémentaire d’amortissement pour ces premières résonances provient des pertes par transmission mécanique par les bords de la table montée sur l’instrument (voir la section 2.1.3 du chapitre 1). Quand la fréquence augmente, l’influence sur les fréquences modales du type de conditions aux limites diminue ; on peut penser qu’il en est de même pour l’amortissement qui représente la partie imaginaire de la fréquence complexe. La moyenne des espacements intermodaux successifs est de 22 Hz, soit une densité modale moyenne sur cette bande de fréquence de 0.046 modes Hz<sup>-1</sup>, conforme aux études similaires sur des tables montées (voir à ce propos la comparaison menée à la section 2.1.2 du chapitre 1). Au-delà de 550 Hz, aucun nuage de points n’est clairement identifiable sur la figure 3.14, et les analyses par bandes étroites ne donnent plus de résultats satisfaisants (le rapport signal à bruit est d’environ 35 dB). On peut noter que le recouvrement modal  $\mu$  de la table d’harmonie est déjà de l’ordre de 30% pour les premières résonances (à 150 Hz) et d’environ 70% à 550 Hz.

## 2.2.2 Déformées modales

Les déformées modales des 10 premières résonances sont représentées aux figures 3.17-3.19. La table est vue de l’arrière, similairement à la figure 3.13 ; l’amplitude est représentée en chaque point du maillage. Les régions claires sont les ventres de vibration, et les régions sombres sont les nœuds. Comme précisé plus haut, à chaque fois la déformée présentée correspond à la moyenne pondérée des déformées mesurées pas chacun des cinq accéléromètres. Pour les deux premiers modes, les mesures aux cinq points sont également données.

La première déformée, à  $f = 81$  Hz, est très similaire à un mode de plaque aux conditions aux limites libre-libre. On voit clairement au centre de la table une ligne nodale verticale – parallèle à  $y'$  – et une seconde ligne nodale horizontale en haut de la table. Les ventres de vibration sont

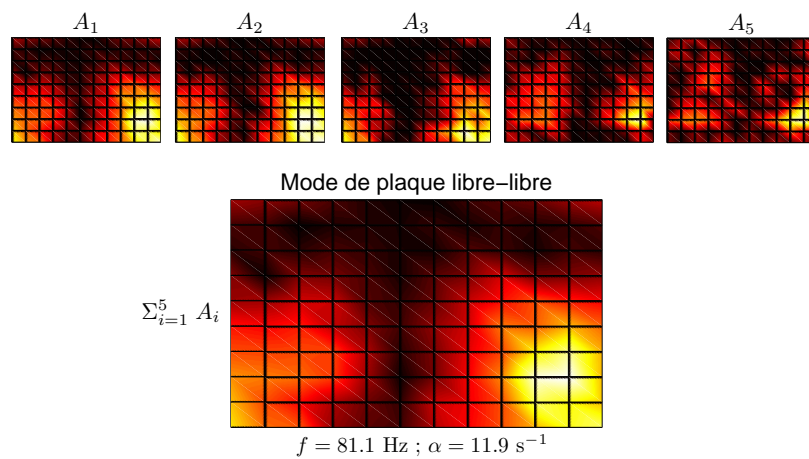


FIG. 3.17 – Déformée modale du premier mode de plaque libre-libre, dit mode *de meuble*. Accéléromètres  $\mathbf{A}_1$ – $\mathbf{A}_5$  (ligne du dessus). Somme des cinq mesures (ligne du dessous).

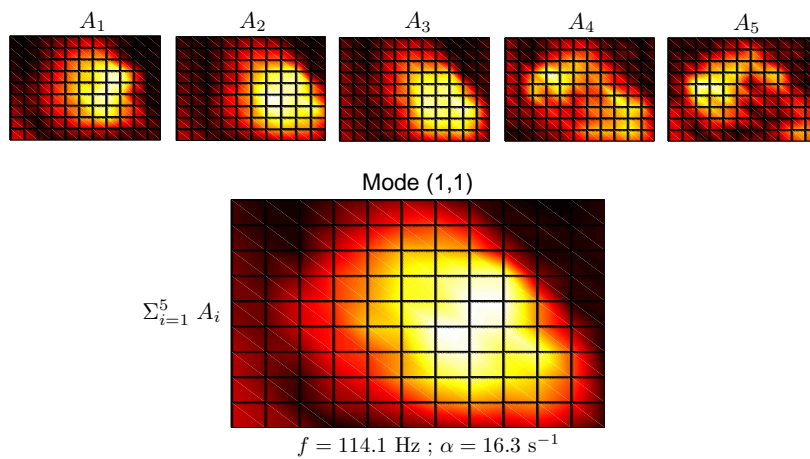


FIG. 3.18 – Déformée modale du premier mode *de table* (1,1).

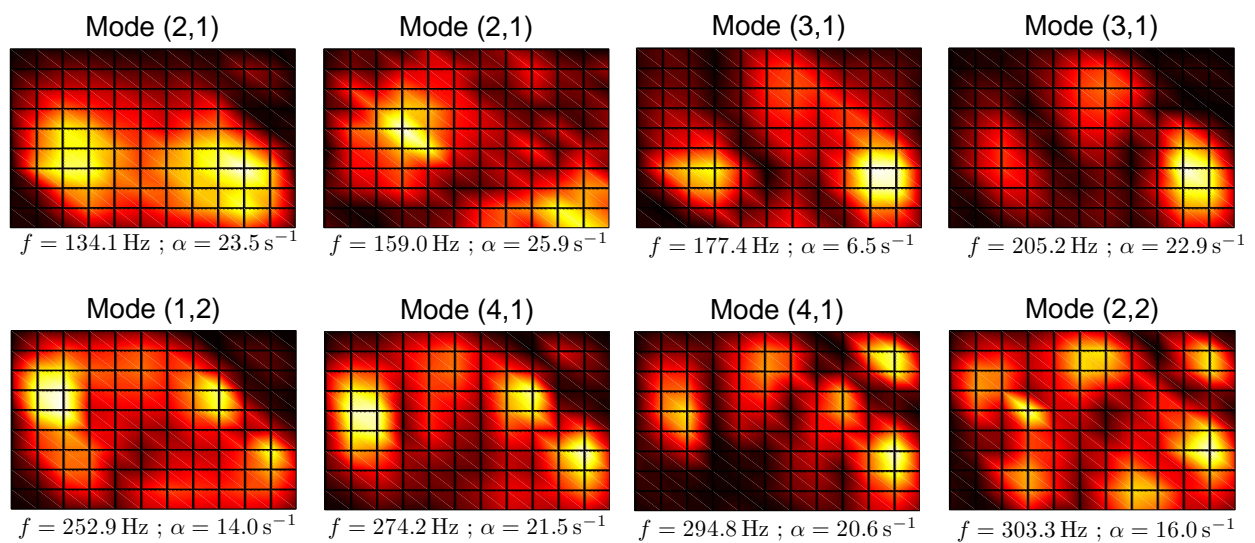


FIG. 3.19 – Déformées modales des 8 modes suivants, jusqu'à 300 Hz (somme des cinq mesures).



particulièrement visibles aux deux coins inférieurs. Pour ce mode, les conditions de déplacement nul aux bords de la structure ne sont pas vérifiées. Cette résonance est causée principalement par les vibrations du *muret* : la *ceinture* entourant la table. L’ensemble {table, meuble} vibre comme une seule pièce (libre) : nous appellerons ce mode un mode *de meuble* (en anglais *case mode*). La dissymétrie de la déformée modale par rapport à l’axe  $(O, y')$  peut s’expliquer du fait que le meuble s’étend d’une vingtaine de centimètres de plus vers le haut de la table que vers le bas. Les résultats peu lisibles donnés par les accéléromètres **A<sub>4</sub>** et **A<sub>5</sub>** sont dûs à leur positionnement au voisinage des régions nodales de ce mode.

La déformée modale du premier mode *de table* est donnée à la figure 3.18. Ce mode possède une seule zone de vibration, très marquée, au centre<sup>11</sup>. À l’inverse du mode précédent, les déplacements aux bords de la table sont quasiment nuls. Nous emploierons pour la suite la dénomination utilisée pour classer les modes de plaque aux conditions aux limites simplement supporté ou encastré<sup>12</sup>. Ce premier mode est donc appelé mode  $(1, 1)$ . Ici également, les points **A<sub>4</sub>** et **A<sub>5</sub>** sont à proximité des nœuds de vibration de ce mode.

L’étude des modes suivants est plus délicate. On voit apparaître des déformées modales quasiment similaires, mais pour des fréquences et amortissements modaux bien séparés. Ainsi deux résonances consécutives sont identifiées comme  $(2, 1)$ , de même que pour le mode  $(3, 1)$  et le mode  $(4, 1)$ . Ces résultats qui peuvent paraître surprenants avaient également été constatés par Suzuki [115], puis Kindel *et al.* [74] sur des tables d’harmonie de piano à queue montées sur l’instrument. Kindel *et al.* mesurent par exemple – pour un même mode – jusqu’à trois déformées identiques de fréquences différentes. Ces *familles* de modes sont dues, comme pour le mode à 81 Hz, au couplage entre la table et le meuble. On peut ainsi noter que la seconde déformée modale de la famille  $(2, 1)$ , à 159 Hz, présente des déplacements beaucoup plus importants aux bords et en particulier à l’extrémité inférieure droite que son homologue à 134 Hz. Une mise en œuvre expérimentale de l’influence de la ceinture sur le couple de mode  $(2, 1)$  a été menée par Suzuki sur un piano demi-queue. En posant des sacs de plomb de plusieurs kilos sur la ceinture afin d’en amortir les vibrations, il observe que la seconde résonance disparaît. Dans notre cas nous n’avons malheureusement pas pu amortir les vibrations de la ceinture car cela s’avérerait trop compliqué à mettre en œuvre sur un piano droit où le muret est positionné verticalement. On peut noter enfin que jusqu’à environ 300 Hz, les coins supérieur droit et inférieur gauche (mouchoirs) ne vibrent quasiment pas. Une comparaison plus poussée entre les déformées mesurées et celles issues d’un modèle en éléments finis de l’ensemble {table, raidisseurs} sera menée à la section 3. Pour des fréquences supérieures à 300 Hz les déformées que nous avons obtenues expérimentalement sont peu lisibles ; globalement les longueurs d’ondes deviennent trop courtes par rapport au pas de maillage. Aucune comparaison avec des modes propres théoriques de plaques n’a pu être menée.

<sup>11</sup>Une comparaison de nos premières déformées modales avec celles publiés par Conklin [35], et Moore *et al.* [92] est menée à la section 2.1.4 du chapitre 1.

<sup>12</sup>Le mode  $(m, n)$  possède suivant l’axe  $(O, x')$  (respectivement  $(O, y')$ )  $m$  (respectivement  $n$ ) ventres de vibration, et  $m - 1$  (respectivement  $n - 1$ ) nœuds de vibration (sans compter les bords de la plaque).

### 2.3 Paramètres modaux estimés entre 500 Hz et 2.5 kHz (excitation continue)

L'identification des paramètres modaux par excitation impulsionnelle n'est plus possible pour des fréquences supérieures à environ 550 Hz. L'étude similaire la plus aboutie – menée par Dérogis<sup>13</sup> [44] sur un piano droit comparable au nôtre – atteint également ses limites vers 500 Hz. Afin d'étendre l'estimation des facteurs d'amortissement modaux et de la densité modale vers des fréquences plus élevées, nous avons utilisé une excitation par haut-parleur (voir la figure 3.20). La méthode de mesure et de reconstruction de la réponse impulsionnelle est celle présentée au 2.1.1. L'excitation électrique du haut-parleur est la même que précédemment : un sinus glissant logarithmique entre 50 Hz et 4 kHz à une fréquence d'échantillonnage de 40 kHz et d'une durée de 26 s. Le haut-parleur est placé à une vingtaine de centimètres du centre de la table et l'accélération de celle-ci est mesurée aux points  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$ ,  $\mathbf{A}_3$  et  $\mathbf{A}_5$ . Les composantes linéaires des

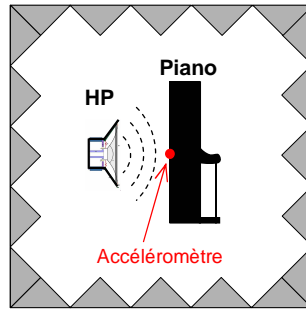


FIG. 3.20 – Excitation par haut-parleur du piano placé dans une chambre semi-anéchoïque. L'accélération est mesurée sur la table en quatre points.

quatre réponses impulsionnelles reconstruites sont analysées en banc de filtre, comme précédemment. À titre d'illustration, nous représentons à la figure 3.21 la composante linéaire de la réponse impulsionnelle reconstruite entre 0 et 2 kHz, pour la mesure au point  $\mathbf{A}_2$ .

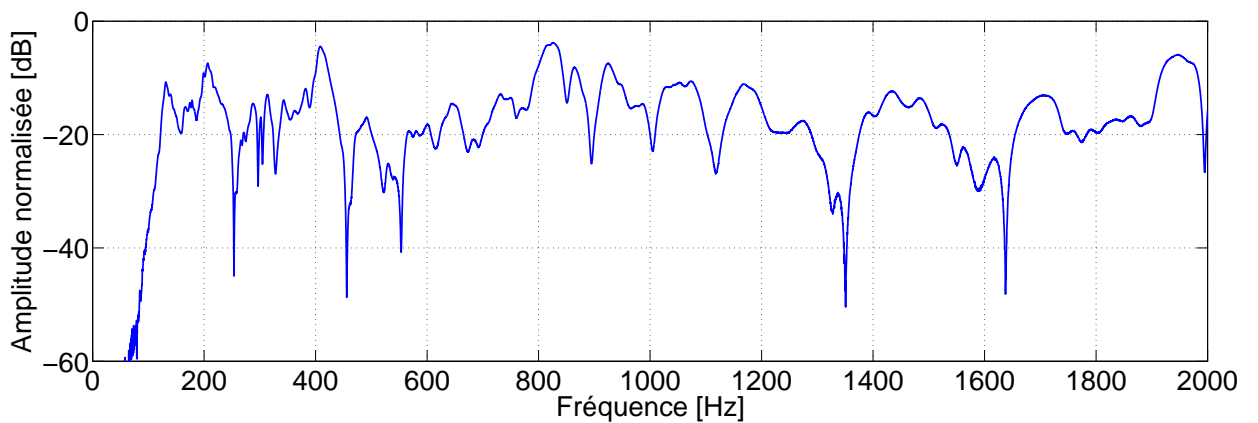


FIG. 3.21 – Spectre (FFT) de la réponse impulsionnelle de la table, mesurée au point  $\mathbf{A}_2$ . Les premières résonances de la table sont bien prononcées – entre 100 et 400 Hz environ – puis le recouvrement modal augmente.

<sup>13</sup>L'auteur utilise un pot vibrant pour exciter la table en un point fixe et mesure l'accélération en différents points de la structure.

### 2.3.1 Validation du protocole expérimental

Dans un premier temps et afin de valider ce second protocole expérimental nous comparons pour les deux types d'excitation – impulsionnelle et continue – les paramètres modaux des vingt premiers modes<sup>14</sup> (figure 3.22). Les résultats sont tout à fait satisfaisants : les erreurs entre les deux séries d'estimations sont du même ordre de grandeur voire inférieure à la dispersion des mesures observée à la section précédente, figure 3.14(b). Cette technique de mesure peut être étendue vers des fréquences supérieures à 550 Hz.

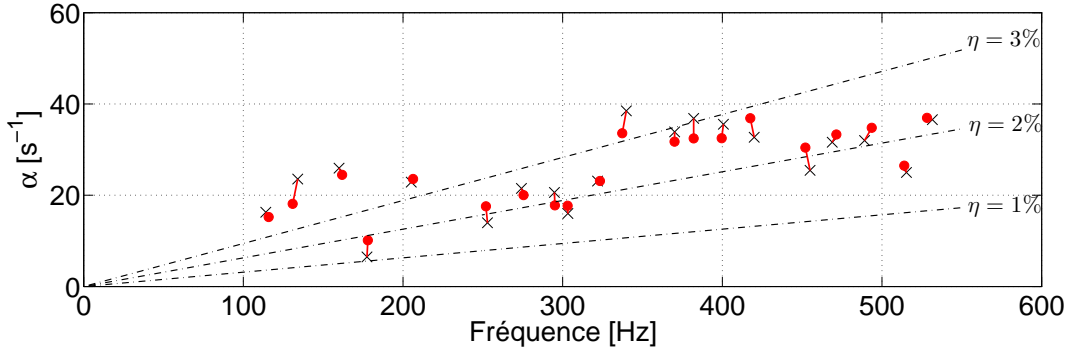


FIG. 3.22 – Comparaison des résultats de mesure obtenus par excitation continue et par excitation impulsionnelle pour les premiers modes de la table d'harmonie. • : moyenne pondérée des paramètres modaux estimés en quatre points de la table excitée par haut-parleur. × : moyenne pondérée des 600 estimations après excitation par marteau d'impact.

### 2.3.2 Facteurs d'amortissement et densité modale

On présente à la figure 3.23 un exemple d'analyse par banc de filtres (RIF) de la réponse impulsionnelle au point de mesure **A<sub>2</sub>**. Les fréquences de coupure des filtres sont choisies en fonction des minima locaux de la transformée de Fourier. Si nécessaire, lorsqu'un doute subsiste sur le nombre de composantes présentes par bandes (mauvaise estimation ESTER), on peut être amené à superposer les bandes passantes des filtres successifs. Les facteurs d'amortissement identifiés de la sorte jusqu'à 3 kHz sont reportés à la figure 3.24 pour le point **A<sub>2</sub>**. On observe que les facteurs de pertes restent compris entre 1 et 3% jusqu'à environ 1200 Hz (la moyenne est de  $\eta \approx 2.3\%$  pour ces 55 premières estimations). Entre 1200 et 1500 Hz, on observe une augmentation sensible de l'amortissement. Celui passe en moyenne de  $80 \text{ s}^{-1}$  avant 1200 Hz à  $130 \text{ s}^{-1}$  dans ce domaine fréquentiel. Cette augmentation soudaine est dû au rayonnement de la structure : cet intervalle est le domaine *critique* de la table (voir la section 2 de l'annexe E où l'amortissement par rayonnement est étudié en détail). Les modes propres situés dans ce domaine rayonnent efficacement, et l'amortissement qui en résulte est important. Il est intéressant de remarquer que ces résultats obtenus sur un piano droit coïncident avec ceux obtenus sur un demi-queue par Suzuki [115], qui situe également le domaine critique de sa table vers 1.4 kHz (voir la figure 1.19). Cependant, la

<sup>14</sup>La mauvaise réponse en fréquence de notre haut-parleur en dessous de 100 Hz (figure 3.21) n'a pas permis de séparer le premier mode de plaque libre (à 81 Hz) du bruit de mesure.

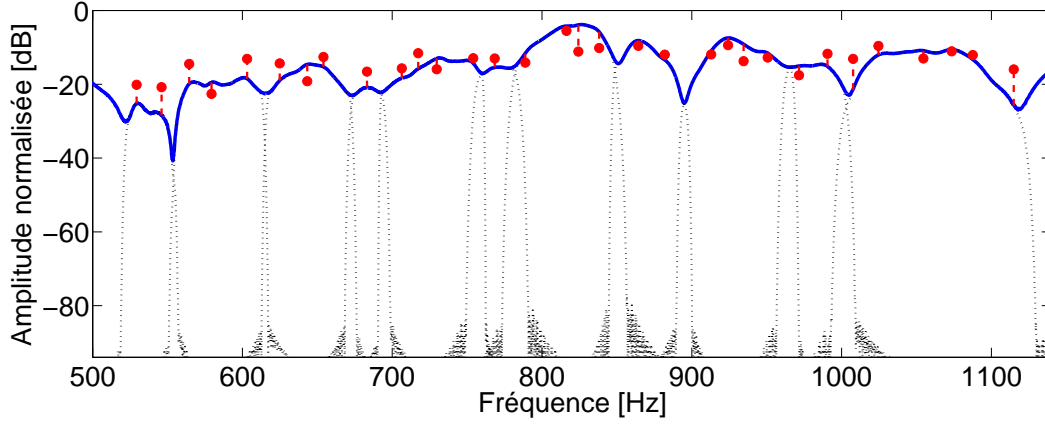


FIG. 3.23 – Exemple d'analyse par banc de filtre d'une réponse impulsionnelle entre 550 et 1150 Hz. — : spectre (FFT) de la réponse impulsionnelle, mesurée au point  $\mathbf{A}_2$ . • : composantes estimées par ESPRIT (fréquences et amplitudes modales). ... : réponses en amplitude des filtres passe-bande.

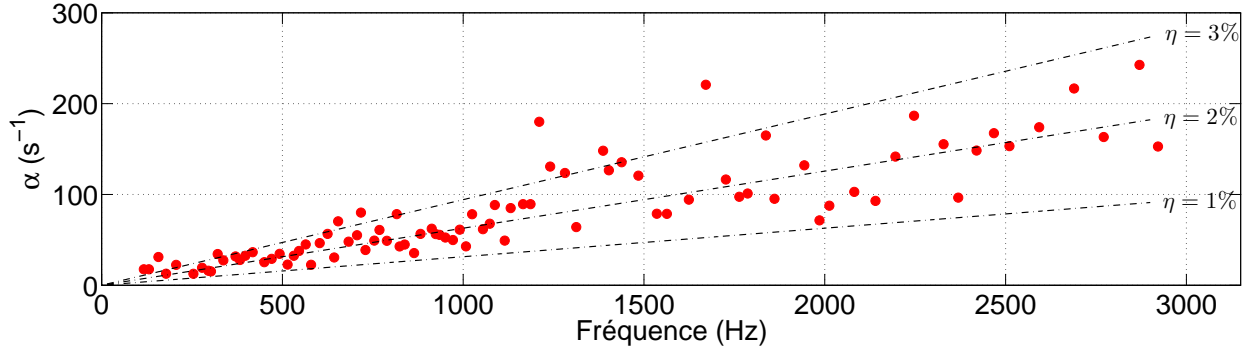


FIG. 3.24 – Facteurs d'amortissement estimés au point  $\mathbf{A}_2$  jusqu'à 3 kHz.

mesure du rayonnement de la table, avec notre méthode d'excitation par haut-parleur n'est pas pleinement concluante. Au-dessus de 1.8 kHz, les facteurs d'amortissement semblent sous-estimés ; l'amortissement est de l'ordre de grandeur des pertes internes du bois et l'influence du rayonnement acoustique n'est pas visible.

Une explication possible tient à la réponse de la chambre semi-anéchoïque. Bien que l'une des hypothèses à la base de la théorie de la réverbération (l'énergie ne décroît pas trop rapidement) ne soit pas bien vérifiée dans cette salle, nous utilisons tout de même cette théorie pour obtenir des ordres de grandeur de l'amortissement intrinsèque de la salle. Des mesures préliminaires dans la chambre vide ont donné un temps de réverbération  $T_{60}$  (durée de décroissance du niveau sonore à -60 dB) d'environ 40 ms entre 1.5 et 3 kHz. Pour ces fréquences – où l'on peut supposer le champ diffus dans la chambre<sup>15</sup>, le facteur d'amortissement de la pression acoustique dans la salle est d'environ  $\alpha_{ch} = 3 \ln(10)/T_{60} \approx 173 \text{ s}^{-1}$ , soit du même ordre de grandeur que les amortissements des *modes de table* (dont l'énergie est principalement concentrée dans la table). Pour que le rayonnement de la table soit détectable dans l'amortissement des modes de table, il faudrait

<sup>15</sup>La fréquence de Schroeder de la salle est d'environ 130 Hz et le rayon critique d'environ 1 m.

que l'amortissement intrinsèque de la salle soit *grand* devant cet amortissement. En quelque sorte, à partir d'une certaine fréquence, l'amortissement du système  $\{\text{haut-parleur, chambre, piano}\}$  est gouverné partiellement par l'amortissement intrinsèque de la salle (comme s'il s'agissait d'une chambre réverbérante!). Dès lors, les facteurs d'amortissement mesurés au-dessus de 1.5–1.8 kHz doivent être reconsidérés. Une solution serait d'effectuer des mesures dans une chambre sourde ayant un temps de réverbération plus faible ou dont les dimensions seraient suffisamment grandes pour que le temps mis à remplir la salle d'énergie acoustique (de l'ordre de grandeur de  $T_{60}$ ) soit nettement supérieur au temps de décroissance caractéristique des modes de table ( $\alpha^{-1}$ ).

Une autre interprétation est qu'à ces fréquences la table est moins amortie par rayonnement qu'aux alentours de 1.2 kHz. La raison probable est qu'au-dessus de 1.2 kHz, chaque mode met en jeu de manière préférentielle un espace inter-raideur particulier : les ondes ne se propagent plus sur la plaque mais dans un guide d'onde où le phénomène de coïncidence acoustique est complètement différent (voir chapitre 4 section 2.2). Dans cette hypothèse, la table rayonne *moins* au-dessus de la fréquence critique, si elle existe.

Le descripteur global qu'est la densité modale permet de nous renseigner sur le comportement vibratoire de la structure dans les moyennes et hautes fréquences. Ici, nous estimons l'espacement intermodal moyen  $\Delta f$  [Hz] (inverse de la densité modale) par moyenne glissante sur six espacements successifs<sup>16</sup>. Il est présenté, en fonction de la fréquence, pour chacun des quatre points de mesure à la figure 3.25. Les quatre courbes sont quasiment identiques jusqu'à environ 1 kHz : l'espacement

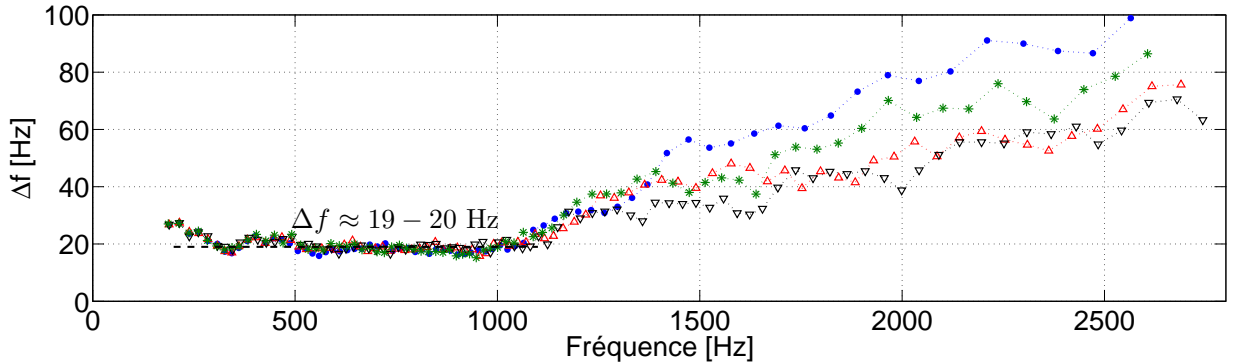


FIG. 3.25 – Espacement intermodal moyen  $\Delta f$  [Hz] de la table d'harmonie estimé aux quatre points  $A_1$  ( $\bullet$ ),  $A_2$  ( $\triangle$ ),  $A_3$  ( $\nabla$ ),  $A_5$  ( $*$ ) en fonction de la fréquence. Il est calculé par moyenne glissante sur 6 espacements intermodaux successifs. Les pointillés ( $\cdots$ ) entre chacune des estimations sont rajoutés pour guider la lecture. Le plateau ( $-$ ) observé entre 500 et 1000 Hz confirme que la table se comporte dans ce domaine fréquentiel comme une plaque homogène.

intermodal estimé diminue puis tend – autour de 500-600 Hz – vers un plateau d'une valeur de l'ordre de 19-20 Hz. Cette observation est centrale dans notre étude. Une densité modale constante est typique des structures bidimensionnelles de type plaque mince (voir la section 1.2). Ce comportement (indépendant de la zone de la table où la mesure est effectuée) suggère donc

<sup>16</sup>Lorsque les modes sont partiellement localisés, il devient expérimentalement très difficile d'accéder à la densité modale *globale* par une mesure effectuée au moyen d'un seul accéléromètre ; l'estimation *locale* de la densité modale est cependant pertinente du point de vue qui nous intéresse : celui de la corde.

que la structure raidie se comporte dans ce domaine fréquentiel comme une plaque homogène équivalente, et justifie la tentative d’homogénéisation de la table au chapitre suivant. De plus, la diminution progressive de  $\Delta f$  mesurée en basses fréquences est cohérente avec le fait que la plaque est *contrainte* aux bords : les conditions aux limites de la table sont de type simplement supporté ou encastré (voir la figure 3.5 où la densité modale  $n(f) = (\Delta f)^{-1}$  fonction de la fréquence est représentée pour différentes conditions aux limites).

À partir de 1-1.1 kHz environ, on observe pour les 4 points de mesures une augmentation très nette de l’espacement intermodal estimé. On peut directement lier cette chute de densité modale à la localisation des ondes entre les raidisseurs (cf. p. 90). Pour ces fréquences, la demi-longueur d’onde des ondes se propageant suivant  $x$  (perpendiculairement aux raidisseurs) devient égal à l’espacement interraidisseurs qui est d’environ 13 cm (avec  $E_x = 11.5$  GPa,  $h = 8$  mm et  $\rho = 392$  on trouve  $\lambda_x = 26.7$  cm à  $f = 1100$  Hz). Ainsi, passée cette fréquence, tout se passe comme si les ondes se trouvaient *guidées* entre les raidisseurs. La densité modale estimée – c’est à dire *vue* par les accéléromètres placés entre les raidisseurs – chute alors sensiblement puisque la dimensionnalité de l’espace considéré est 1 au lieu de 2 (plaque). Un second point vient corroborer cette interprétation : il semblerait que l’espacement intermodal estimé augmente avec la fréquence d’autant plus vite que la longueur de l’espace inter-raidisseurs est petite. Les points **A<sub>1</sub>** et **A<sub>5</sub>** sont situés aux deux coins de la table où les raidisseurs sont courts ; les deux autres points de mesure sont situés plus au centre où la longueur du guide inter-raidisseurs est plus grande. Enfin, le fait que pour une même longueur de guide inter-raidisseurs,  $\Delta f$  mesuré dans le registre aigu du piano (\* sur la figure) soit inférieur à celui mesuré dans le registre médium-basse (•) peut s’expliquer par le fait que la table est sûrement plus fine dans l’aigu (par *tapering*, en anglais). Malheureusement il ne nous a pas été possible de mesurer précisément l’épaisseur de la table dans cette zone pour le confirmer<sup>17</sup>.

### 3 Comparaison avec un modèle en éléments finis de l’ensemble {table, raidisseurs, mouchoirs}

Un modèle en éléments finis en deux dimensions de la table d’harmonie est réalisé sous le logiciel libre **CAST3M**. Les éléments utilisés sont de type plaque mince, triangulaires à 3 nœuds et 6 degrés de liberté par nœuds. On modélise la table comme une plaque plane raidie par 11 barres parallèles (raidisseurs) et deux barres supplémentaires dans deux des coins. Le maillage de la structure est présenté à la figure 3.26. Il a 3836 nœuds ; la taille des éléments est de 2 cm.

Nous n’avons pas trouvé de données constructeurs pour cette table de moyenne gamme. Les données géométriques ont été mesurées sur la table montée ; les caractéristiques mécaniques des matériaux sont tirées de la littérature. L’épaisseur de la table est prise constante, égale à 8 mm.

---

<sup>17</sup>En fait, l’épaisseur n’a pu être mesurée de manière précise qu’en un seul point, au centre de la table, où la table est percée. Ce trou permet à une tige en métal fixée au treillis massif – poutres verticales, visibles figure 3.13 appelées *barrage* – de soutenir le cadre en fonte (situé de l’autre côté de la table et supportant la forte tension des cordes).



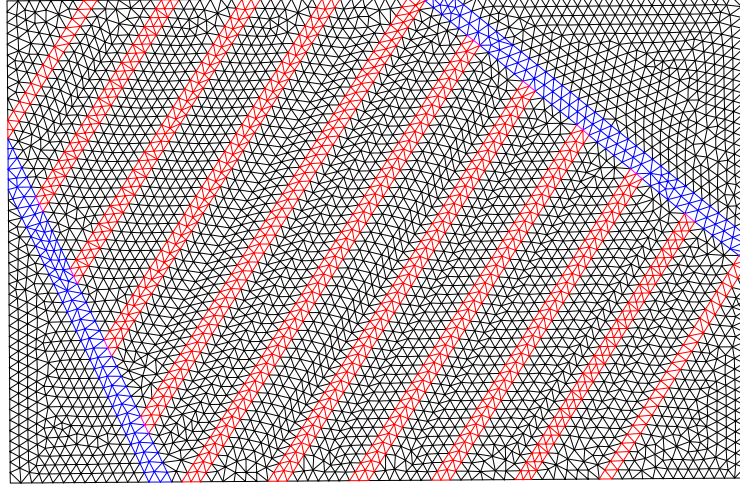


FIG. 3.26 – Maillage numérique de l'ensemble {table d'harmonie, raidisseurs, mouchoirs}.

La table et les raidisseurs sont en épicéa, les barres délimitant les mouchoirs en sapin. L'angle d'orthotropie  $\theta$  de la structure est de  $33^\circ$  (voir la figure 3.6). L'orientation du fil du bois pour toutes les barres est supposée dans le sens de leur longueur respective. Les constantes élastiques des matériaux sont celles mesurées par Berthaut [13] sur des échantillons d'épicéa et de sapin utilisés pour sa table d'harmonie. Elles sont données au tableau 3.2. On remarque que l'épicéa

	$E_L$ [GPa]	$E_R$ [GPa]	$G_{LR}$ [GPa]	$\nu_{LR}$	$\rho$ [kg m <sup>-3</sup> ]
Épicéa	11.5	0.47	0.5	0.005	392
Sapin	8.86	0.54	1.6	0.005	691

TAB. 3.2 – Caractéristiques mécaniques de spécimens d'épicéa et de sapin destinés à la lutherie de tables d'harmonie de piano d'après Berthaut [13].

mesuré par Berthaut est sûrement de l'épicéa de Sitka; les valeurs sont comparables à celles données par Hearmon au tableau 1.1.

Pour simplifier le modèle en éléments finis, l'épaisseur des raidisseurs est supposée constante sur toute leur longueur. En fait, les bords des raidisseurs des tables d'harmonie de piano sont plus fins qu'au centre (voir la figure 3.27). Cette variation d'épaisseur, en *sifflet*, permet d'assouplir les

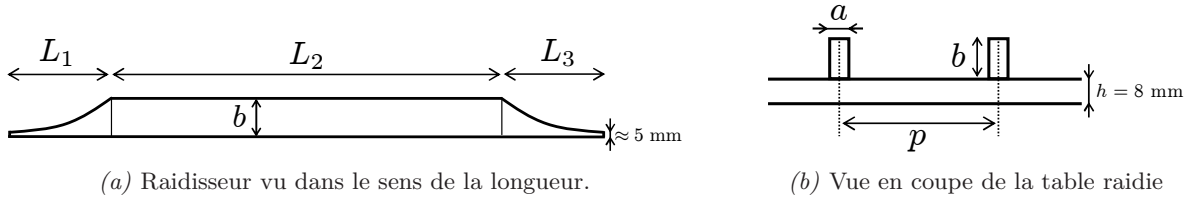


FIG. 3.27 – Dimensions des raidisseurs et vue en coupe de la table raidie.

bords de la table. Nous ne tenons pas compte dans notre modèle de cet assouplissement *local*, mais nous moyennons son effet sur toute la longueur du raidisseur : l'épaisseur retenue est la moyenne des



épaisseurs des trois zones pondérées par les longueurs correspondantes. Les dimensions de chacun des raidisseurs ainsi que les épaisseurs moyennes retenues dans notre modèle sont récapitulées au tableau 3.3. Les espacements inter-raideurs sont également donnés au tableau 3.4. Les deux barres de mouchoirs sont identiques en largeur (environ 4 cm) et en épaisseur (environ 3.3 cm).

N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$L_1$	16.0	18.5	17.5	16.5	16.5	12.0	13.0	15.0	15.0	15.0	10.0
$L_2$	8.0	19.0	33.5	48.5	49.0	71.5	59.5	46.0	37.0	21.0	11.0
$L_3$	6.0	8.0	11.0	13.0	15.0	15.0	16.0	17.0	16.5	22.5	26.5
$a$	2.0	2.6	2.8	2.8	3.0	3.2	3.0	3.0	2.8	2.5	2.0
$b$	2.3	2.3	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6	2.5	1.8	1.7
$b_{\text{moy}}$	1.6	1.8	2.1	2.2	2.2	2.3	2.3	2.2	2	1.4	1.2

TAB. 3.3 – Dimensions des raidisseurs. La numérotation des raidisseurs commence dans l’aigu de la table.  $b_{\text{moy}}$  est l’épaisseur moyenne du raidisseur pondérée par les longueurs. Toutes les valeurs sont en centimètres.

N°	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11
$p$	12.7	12.8	12.9	13.5	13.0	13.7	13.0	13.0	12.7	12.8

TAB. 3.4 – Espacement  $p$  entre deux raidisseurs consécutifs (en centimètres).

La résolution numérique de l’équation aux valeurs propres est effectuée dans le cas conservatif et pour des conditions aux limites de type encastree. Les déformées modales *numériques* sont présentées à la figure 3.28 et les fréquences propres correspondantes sont données au tableau 3.5. Pour faciliter la comparaison avec les mesures, nous avons reproduit les déformées expérimentales sous les déformées numériques. Comme nous n’avons pas modélisé la ceinture, il est normal de ne pas retrouver le premier mode de meuble ni les dédoublements de modes observés expérimentalement. Mis à part le mode (1,2), les modes numériques sont semblables aux modes expérimentaux : les positions des ventres et des nœuds de vibration sont correctes, particulièrement pour les modes (1,1), (2,1) et (4,1). La déformée (1,2) mesurée semble être une combinaison des deux déformées modales numériques d) et f). On peut remarquer par ailleurs que le mouchoir supérieur droit de la déformée (2,2) numérique présente un ventre de vibration, tout comme la déformée mesurée.

Mode	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(1,2)	(4,1)	(1,2) ?	(2,2)
$f_n$ [Hz]	84.6	114.2	157.6	186.4	212.5	227.4	272.0
$f_e$ [Hz]	114.1	134.1	205.2	252.9	274.2	-	303.3

TAB. 3.5 – Comparaison des premières fréquences propres des modes de table.  $f_{\text{num}}$  : résultats numériques.  $f_{\text{exp}}$  : résultats expérimentaux.

Les fréquences propres mesurées  $f_{\text{exp}}$  sont systématiquement supérieures aux fréquences propres numériques  $f_{\text{num}}$  (tableau 3.5). La principale raison tient sans doute au fait que ni la charge des

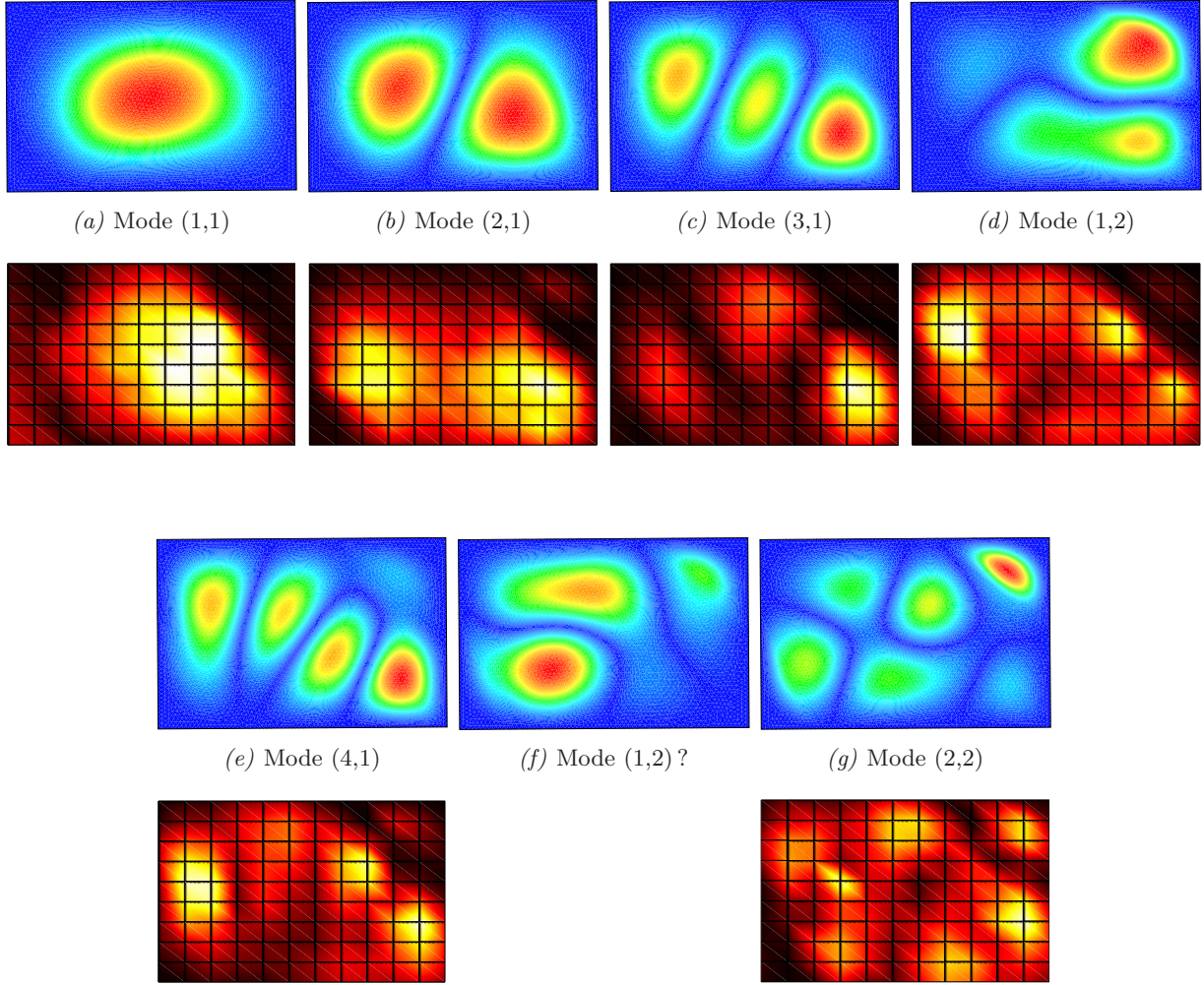


FIG. 3.28 – Comparaison des déformées des premiers modes *de table* calculés numériquement par éléments finis (lignes du haut) et mesurés (lignes du bas).

cordes aux chevalets ni la présence de ces derniers ne sont prises en compte dans notre modèle numérique simplifié. Or plusieurs études expérimentales menées sur des tables de pianos droit ou à queue montrent une augmentation significative des fréquences propres lorsque les cordes sont mises sous tensions. Wogram [126] mesure une augmentation de la première fréquence propre de sa table de piano droit, qui passe de 90 Hz à 115 Hz après mise en charge de la table. De même, Moore et Zietlow [92] rapportent une augmentation due à la charge sur les trois premières fréquences propres : elles passent respectivement de 80, 110 et 170 Hz à 112, 129 et 204 Hz. On peut remarquer que ces valeurs obtenues sur un piano droit de dimensions différentes du nôtre sont particulièrement proches de nos valeurs numériques (sans charge) et expérimentales (avec). Ces auteurs ont montré de plus que la charge pouvait modifier les déformées modales des premiers modes (figures 1.9 et 1.10) ; cette dernière observation peut dans notre cas également expliquer les mauvaises correspondances entre certaines déformées modales numériques et expérimentales. Mais l'étude de la précontrainte de la table est un phénomène très complexe car il inclut d'une part la fabrication (bombé initial de la table) auxquelles se superposent des forces dues à la charge des

cordes (voir à ce propos l'article de Mamou-Mani *et al.* [87]). En d'autres termes, les contraintes résiduelles dans la table d'harmonie sont loin d'être attestées pour un piano en fonctionnement.

Néanmoins, il est établi que l'influence de la *précontrainte* de la table s'atténue avec la fréquence (voir l'annexe C). Dès lors, nous nous proposons de comparer avec nos mesures l'évolution fréquentielle de l'espacement intermodal des modes numériques calculés jusqu'à environ 1600 Hz. Pour ce calcul, la taille des éléments du maillage est réduite à 1 cm (soit 14920 nœuds). À 1600 Hz, cela correspond à environ 10 points par longueur d'ondes dans la direction des raidisseurs et 22 points dans la direction perpendiculaire. Comme à la section précédente  $\Delta f$  est calculé par moyenne glissante sur 6 espacements intermodaux successifs. Il est présenté à la figure 3.29. Globalement, l'espacement intermodal calculé numériquement diminue jusqu'à environ 600 Hz puis semble osciller autour de 19-23 Hz indiquant un  $\Delta f$  un peu supérieur au *plateau* de 19-20 Hz observé expérimentalement. La raideur globale du modèle numérique semble donc légèrement sur-estimée. Au-dessus de 1.1 kHz, les résultats numériques et expérimentaux ne sont plus comparables

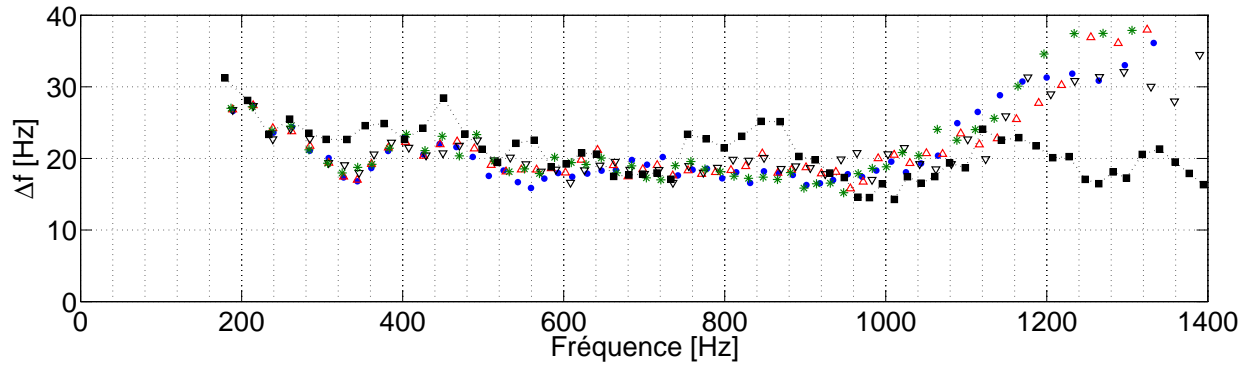


FIG. 3.29 – Comparaison des espacements intermodaux issus du modèle en éléments finis (■) et des mesures effectuées aux points  $A_1$  (•),  $A_2$  (△),  $A_3$  (▽),  $A_5$  (\*).

puisque dans le premier cas la densité modale de toute la table est considérée, alors que dans le second, seule la densité modale de l'espace inter-raideurs où est placé l'accéléromètre  $A_1$  est estimée. Néanmoins l'observation des déformées modales numériques pour ces fréquences vient bien confirmer l'hypothèse de localisation des ondes entre les raidisseurs (voir la figure 3.30).

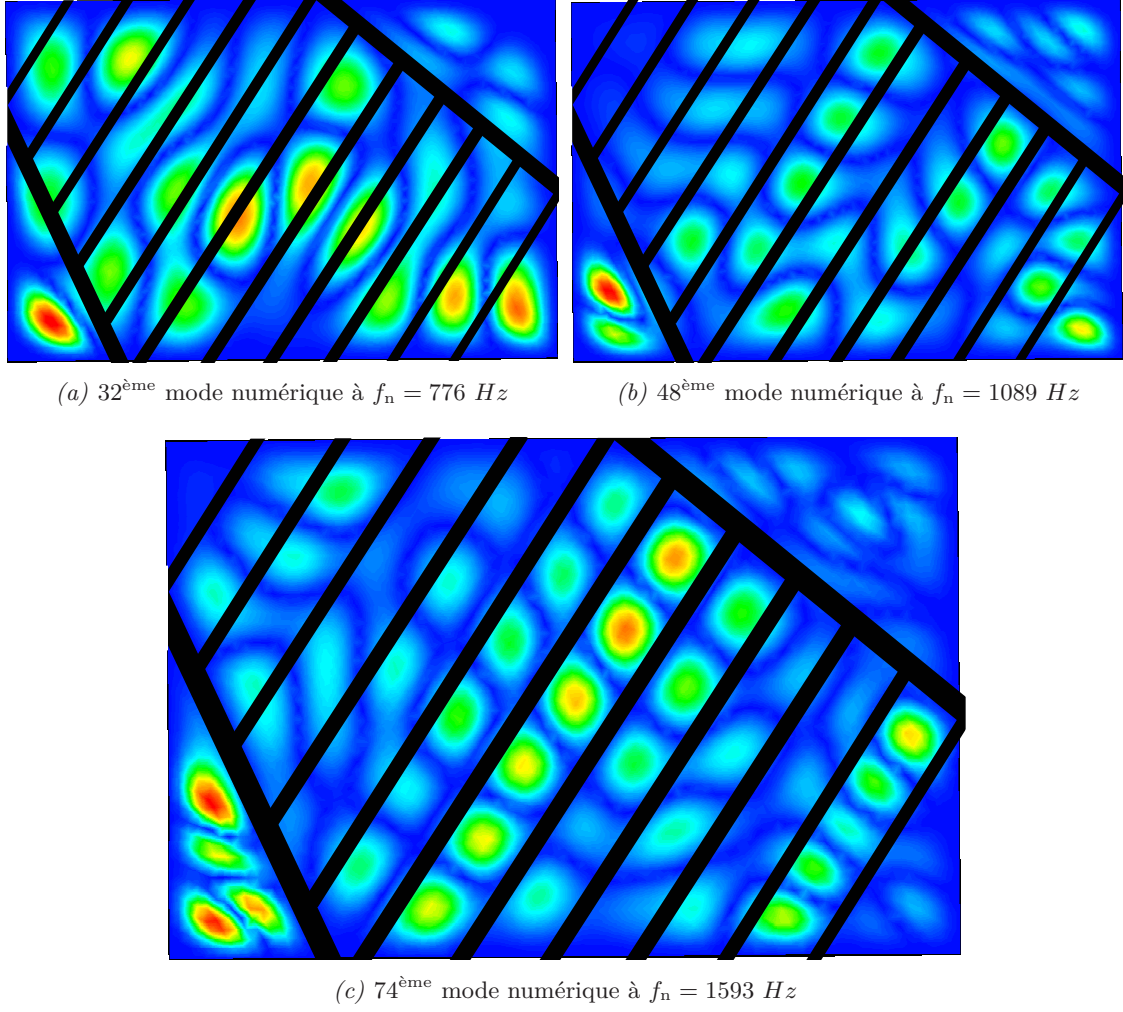


FIG. 3.30 – Déformée modale issues du modèle en éléments finis. On a indiqué en noir les positions des raidisseurs et des barres de mouchoirs. À 1593 Hz, les ventres de vibration sont bien localisés entre les raidisseurs (nœuds de vibration). Ce comportement est déjà visible pour la déformée modale à 1089 Hz, mais pas à 776 Hz.

## 4 Conclusion

Nous avons appliqué dans ce chapitre l'analyse modale haute résolution à une table d'harmonie de piano droit. Deux études modales ont permis d'étendre vers les moyennes et hautes fréquences l'identification des paramètres modaux de la structure.

L'étude par excitation impulsionnelle, a notamment mis en évidence l'influence de la ceinture sur le comportement basse fréquence de la table d'harmonie. L'estimation des paramètres modaux a été rendue possible jusqu'à environ 2.5 kHz grâce à une excitation continue de la structure par sinus glissant logarithmique. L'augmentation sensible de l'amortissement mesurée entre 1200 et 1500 Hz permet de situer le domaine critique de rayonnement de la table dans cet intervalle fréquentiel. Par ailleurs, l'observation d'une densité modale constante d'une valeur d'environ  $0.05 \text{ modes Hz}^{-1}$  suggère que la table raidie se comporte comme une plaque homogène jusqu'à

1100 Hz environ. À cette fréquence, la demi-longueur d'ondes des ondes se propageant perpendiculairement aux raidisseurs devient égale à l'espacement inter-raideurs. Pour des fréquences plus élevées, la localisation des ondes entre les raidisseurs se traduit par une diminution sensible de la densité modale locale.

Ce chapitre se conclut par une comparaison des résultats expérimentaux avec ceux obtenus numériquement par un modèle en éléments finis de l'ensemble {table, raidisseurs, mouchoirs}. Malgré le fait que ce modèle numérique simplifié ne tiennent pas compte de toutes les subtilités – comme la présence des chevalets et de la charge des cordes – les résultats sont assez satisfaisants : les premières déformées modales sont comparables à celles mises en évidence expérimentalement et la densité modale est globalement du même ordre que celle mesurée. Enfin, l'observation numérique des déformées modales obtenues avec le modèle en éléments finis vient bien confirmer la localisation des ondes entre les raidisseurs au-dessus de 1100 Hz.



## Chapitre 4

# Description synthétique d'une table d'harmonie de piano

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Plaque homogène équivalente</b>	<b>100</b>
1.1	Homogénéisation des plaques raidies – Calcul proposé par Berthaut	100
1.2	Application à la table d'harmonie – Modèle en éléments finis de la table homogène équivalente	101
1.3	Plaque isotrope	103
<b>2</b>	<b>Modèle minimal</b>	<b>106</b>
2.1	Densité modale et admittance au chevalet	106
2.2	Guide d'onde <i>inter-raidisateurs</i> en moyennes et hautes fréquences	114
<b>3</b>	<b>Discussion sur les facteurs susceptibles d'influencer la sonorité dans l'aigu</b>	<b>119</b>
3.1	Rayonnement dans l'aigu	119
3.2	Mobilité de la table dans l'aigu	120
<b>4</b>	<b>Remplacement de la table d'harmonie par une structure en matériau composite</b>	<b>121</b>
4.1	Substitution de l'épicéa par un matériau composite dans les instruments de musique	121
4.2	Exemple d'étude sur la table d'harmonie du violon – Remplacement de la structure par un sandwich balsa/fibre de lin	123
4.3	Solutions envisageables pour le piano	126
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>128</b>

---

L'objectif de ce dernier chapitre est de donner une description synthétique d'une table d'harmonie de piano.

Dans un premier temps, la validité d'un modèle de plaque homogène équivalente est étudiée. Un calcul d'homogénéisation proposé par Berthaut, consistant à fondre les raidisseurs dans la



structure, est appliqué à la table que nous avons étudiée, sans grand succès. Un modèle simple de plaque isotrope est alors considéré dont on montre qu'il permet de retrouver la densité modale observée au chapitre précédent, constante au-dessous de 1100 Hz et qu'il donne des déformées pour les premiers modes particulièrement proches des mesures.

Puis une description synthétique est construite en se basant sur les descripteurs : densité modale, facteur de pertes moyen et espacement inter-raidisateurs. Un modèle de guide d'onde *inter-raidisateurs* est présenté et une équation de dispersion de ce milieu est proposée pour décrire le comportement de la structure au-dessus de 1100 Hz. Les résultats sur le rayonnement sont inattendus : la table peut rayonner *moins* au-dessus de la fréquence de coïncidence qu'en basses fréquences. Ainsi, certains partiels de cordes pourraient sonner anormalement longtemps et altérer le timbre dans l'aigu. Enfin des propositions pour l'amélioration sonore de la table d'harmonie sont données et le remplacement du matériau *bois* par un matériau composite est envisagé.

## 1 Plaque homogène équivalente

### 1.1 Homogénéisation des plaques raidies – Calcul proposé par Berthaut

Berthaut *et al.* [14] ont développé un calcul d'homogénéisation des plaques raidies à partir d'hypothèses statiques. Le calcul prend appui sur les travaux de Timoshenko [117] et s'inspire en particulier de l'étude de Cordonnier-Cloarec [36] sur le rayonnement des structures nervurées. La méthode consiste à *fondre* les raidisseurs au sein d'un matériau homogène équivalent (figure 4.1). Le calcul est valide en basses fréquences, pour des longueurs d'ondes grandes par rapport à l'espacement inter-raidisateurs. La nouveauté de leur méthode réside dans le fait que le matériau de la plaque (sans les raidisseurs) et le matériau des raidisseurs peuvent être différents d'une part et orthotropes d'autre part. Nous rappelons ici les différentes étapes de la méthode d'homogénéisation ; le calcul complet est détaillé dans [13] ou [14].

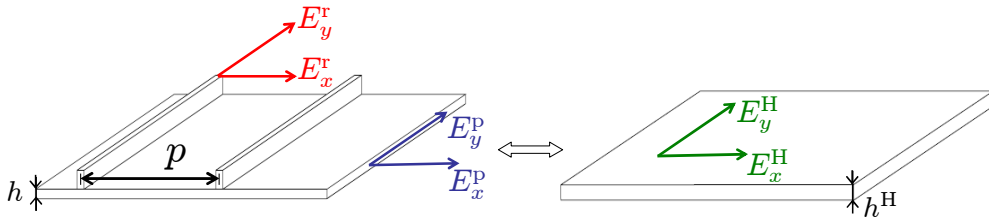


FIG. 4.1 – La plaque orthotrope raidie équivaut, en basses fréquences, à une plaque orthotrope homogène. Les caractéristiques mécaniques sont affectées d'un exposant correspondant au matériau considéré : <sup>p</sup> pour la plaque, <sup>r</sup> pour les raidisseurs, et <sup>H</sup> pour la plaque homogénéisée. Schéma inspiré de Berthaut [13].

La structure est supposée périodique d'espacement inter-raidisateurs constant  $p$ . Les directions d'orthotropie des raidisseurs et de la plaque sont supposées alignées (l'axe  $x$  est orthogonal aux raidisseurs).

- La première étape consiste à définir une épaisseur équivalente  $h^H$  de la structure homogénéisée. Pour cela, la *fibres neutre de masse* (selon Berthaut) est calculée, puis est supposée correspondre à la moitié de l'épaisseur de la plaque homogène équivalente. La masse volumique  $\rho^H$  est calculée ensuite par conservation de la masse entre les deux modèles.
- La seconde étape consiste à calculer successivement les modules d'Young  $E_x^H$  et  $E_y^H$  de la plaque homogène par conservation des moments d'inertie de flexion suivant chacun des axes. Perpendiculairement aux raidisseurs, la rigidité de flexion suivant l'axe  $x$  est donnée par l'association en série (addition des souplesses) sur une période  $p$ , de la plaque seule (sur une longueur  $p - a$ ) et de l'assemblage double couche de la plaque et du raidisseur (sur une longueur  $a$ ). Dans la direction des raidisseurs, la rigidité de flexion suivant l'axe  $y$  correspond cette fois à l'association en parallèle (addition des raideurs) sur une période  $p$  de la plaque seule (sur une longueur  $p$ ) et du raidisseur seul (sur une longueur  $a$ ).
- Enfin la structure équivalente est supposée avoir une orthotropie *elliptique*. Le module de cisaillement équivalent s'écrit alors :  $G_{xy}^H = \frac{1}{2} \sqrt{E_x^H E_y^H}$ . Dans cette méthode, tous les effets du couplages sont mis dans le module de cisaillement : les coefficients de Poisson de la plaque homogénéisée  $\nu_{xy}^H$  et  $\nu_{yx}^H$  sont donc nuls.

## 1.2 Application à la table d'harmonie – Modèle en éléments finis de la table homogène équivalente

Berthaut a appliqué ce calcul d'homogénéisation à une table d'harmonie de piano demi-queue [13]. Dans son cas, les conditions aux limites étaient choisies de type libre comme lors de ses mesures. Ni le modèle ni les expériences ne faisaient intervenir la charge des cordes et une comparaison précise est donc possible. Il apparaît que les fréquences propres du modèle homogénéisé de Berthaut sont toutes largement supérieures à ses mesures, dans des proportions variables. Une explication donnée est que la rigidité dynamique  $\frac{D_y^H}{\rho^H h^H} = \frac{E_y^H h^H}{12 \rho^H}$  dans la direction parallèle aux raidisseurs<sup>1</sup> varie grandement lorsque le calcul d'homogénéisation est effectué sur chaque période spatiale de la table<sup>2</sup>.

Nous avons appliqué le calcul d'homogénéisation à la table d'harmonie de piano droit que nous avons étudiée. La structure n'étant que pseudo-périodique (voir le tableau 3.4) il est nécessaire d'évaluer les caractéristiques géométriques de la table. En moyennant les espacements inter-raideurs  $p$  sur toute la table ainsi que la largeur  $a$  et les épaisseurs pondérées  $b_{\text{moy}}$  des raidisseurs, on trouve  $\bar{p} = 13$  cm,  $\bar{a} = 2.7$  cm et  $\bar{b}_{\text{moy}} = 1.9$  cm. Le calcul précédent donne alors en première approximation une table équivalente homogène à la table raidie dont les caractéristiques

---

<sup>1</sup>On rappelle que les coefficients de Poisson  $\nu_{xy}^H$  et  $\nu_{yx}^H$  de la plaque homogène sont supposés nuls.

<sup>2</sup>Dans le modèle de Love-Kirchhoff, la rigidité dynamique pilote la dépendance entre le nombre d'onde et la pulsation :  $\frac{D}{\rho h} = \frac{\omega^2}{k^4}$  (voir annexe A).

mécaniques sont :

$$E_x^H = 1.45 \text{ GPa} , \quad E_y^H = 5.51 \text{ GPa} , \quad G_{xy}^H = 1.41 \text{ GPa} , \quad \rho^H = 277 \text{ kg m}^{-3} , \quad h^H = 16.9 \text{ mm} \quad (4.1)$$

L'ajout de raidisseurs semble donc surcompenser grandement l'anisotropie ; le rapport d'orthotropie  $E_y/E_x$  ( $= E_R/E_L$ ) passant d'environ 1/24 (pour la plaque en épicéa non raidie) à environ 3.8/1 (après ajout des raidisseurs). Ce rapport nous paraît beaucoup trop élevé : nous y reviendrons plus tard.

Le tableau 4.1 donne les caractéristiques mécaniques obtenues après homogénéisation locale de notre table dans deux zones différentes de la structure : au centre de celle-ci – zone fortement raidie – et dans le médium basse où les raidisseurs sont moins larges et moins épais. Globalement,

	$E_x^H$	$E_y^H$	$G_{xy}^H$	$\rho^H$	$h^H$	$\frac{E_y^H}{E_x^H}$	$\frac{D_x^H}{(\rho^H h^H)}$	$\frac{D_y^H}{(\rho^H h^H)}$
Zone faiblement raidie (n°11)	3.9	7.4	2.7	330	12	1.9	140	260
Zone fortement raidie (n°6)	0.8	5.2	1.0	260	21	6.2	116	720

TAB. 4.1 – Homogénéisation locale de la table dans deux zones différentes. Première ligne : autour du raidisseur n°11 situé dans le médium basse. Seconde ligne : autour du raidisseur n°6 situé au centre de la table. Les modules d'Young et de cisaillement sont en GPa, la densité en  $\text{kg m}^{-3}$ , l'épaisseur en mm et les rigidités dynamiques en  $\text{m}^4 \text{s}^{-2}$ .

la rigidité dynamique dans la direction perpendiculaire aux raidisseurs est constante alors que dans la direction parallèle, elle varie d'un facteur quasiment égal à trois.

Malgré ces réserves, un modèle en éléments finis de la table homogénéisée a été construit avec les paramètres mécaniques donnés ci-dessus (relation 4.1). Afin de juger de sa validité nous le comparons aux mesures ainsi qu'au précédent modèle numérique de la table raidie (section 3 du chapitre 3). Le modèle numérique est réalisé sous CAST3M : éléments triangulaires de 2 cm. La partie raidie de la table est remplacée par la plaque homogène équivalente ; les deux mouchoirs sont modélisés de la même manière que précédemment.

Les déformées modales (non reproduites) sont comparables aux précédentes (figure 3.28) mais les fréquences propres sont bien plus élevées que celles trouvées avec le modèle numérique de la table raidie (voir le tableau 4.2). La charge des cordes n'étant pas modélisée, une comparaison avec les premières fréquences propres mesurées s'avère délicate. L'espacement intermodal moyen entre 500 et 1000 Hz est d'environ 24 Hz pour ce second modèle numérique, soit une erreur de l'ordre de 25% avec les mesures. La raideur globale apparaît donc trop élevée : le modèle numérique n'est pas satisfaisant. Le calcul d'homogénéisation semble avoir surestimé les rigidités.

Il semblerait donc également que notre table *résiste à l'homogénéisation*.

Mode	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(1,2)	(4,1)	(1,2) ?	(2,2)
$f_{\text{num1}}$ [Hz]	84.6	114.2	157.6	186.4	212.5	227.4	272.0
$f_{\text{num2}}$ [Hz]	95.8	134.7	191.1	219.3	278.9	252.6	294.0
$f_{\text{exp}}$ [Hz]	114.1	134.1	205.2	252.9	274.2	-	303.3

TAB. 4.2 – Comparaison des premières fréquences propres des modes *de table*.  $f_{\text{num1}}$  : modèle éléments finis de la table raidie.  $f_{\text{num2}}$  : modèle éléments finis de la table homogénéisée.  $f_{\text{exp}}$  : résultats expérimentaux. Le mode (4,1) et le second mode (1,2) sont inversés pour la table homogénéisée.

### 1.3 Plaque isotrope

Nous sommes donc face à une situation paradoxale. D’une part nos mesures suggèrent que la table se comporte comme une plaque homogène, présentant une densité modale constante jusqu’à environ 1100 Hz (chapitre précédent) ; d’autre part le calcul précédent conclut que cette structure n’est pas susceptible d’être homogénéisée suivant la méthode proposée par Berthaut *et al.* [14].

Qu’en est-il donc ? Nous pensons que le problème se situe dans le calcul d’homogénéisation, qui apparaît trop approximatif et mal adapté à la structure. Il donne des résultats aberrants suivant  $y$  en surestimant grandement la rigidité dans cette direction et de ce fait le rapport d’orthotropie. La non prise en compte des chevalets dans le calcul en est sûrement une raison importante. Faits de bois dur<sup>3</sup> ils présentent une masse qui est loin d’être négligeable devant celle de la table. Nous avons évalué la masse des deux chevalets – que nous supposons être en érable de masse volumique  $750 \text{ kg m}^{-3}$  – à environ 2.1 kg soit plus de 20% de la masse totale de la table (9 kg, en comptant les raidisseurs et les barres de mouchoirs). Par ailleurs, l’épaisseur des chevalets est grande comparée à celle des raidisseurs : environ 3.1 cm pour le grand chevalet, et plus de 6 cm pour celui des basses. Le moment d’inertie en flexion étant proportionnel au cube de l’épaisseur, leur influence est importante dans la dynamique vibratoire de la table et les ignorer génère donc une erreur certainement très importante. Ils sont globalement parallèles au fil du bois (voir la figure 3.6), rigidifiant donc surtout suivant l’axe  $x$ , ce qui va bien dans le sens d’une réduction du trop fort rapport d’orthotropie trouvé par le calcul d’homogénéisation. Cependant il manque des données et un outil d’homogénéisation efficace pour pouvoir conclure à ce stade notre analyse. À cela vient s’ajouter l’ignorance des caractéristiques exactes des matériaux que nous cherchons à modéliser. Enfin nous n’avons pas toutes les données géométriques de la table. La variation de l’épaisseur le long de la table est ignorée ; les mesures des dimensions des raidisseurs sont faites directement sur la structure, et sont parfois approximatives. Un calcul fiable d’homogénéisation est donc pratiquement impossible. Une solution envisageable pour estimer les rigidités globales de la structure suivant les deux axes d’orthotropie serait par exemple de modéliser par éléments finis la table avec ses raidisseurs et ses deux chevalets et de procéder à des *expériences numériques* (essais numériques de traction par exemple suivant les deux directions d’orthotropie).

Il n’en reste pas moins que plusieurs auteurs et facteurs de piano rapportent qu’en situation

<sup>3</sup>Le plus souvent en érable ou hêtre, de masses volumiques égales à près du double de celle de l’épicéa et de modules d’Young longitudinaux comparables [25].

de jeu, une table d'harmonie de piano se comporte, en première approximation, comme une plaque homogène *isotrope* en basses fréquences. Conklin [35] précise que les raidisseurs rajoutent assez de rigidité pour que les caractéristiques mécaniques radiales soient égales aux caractéristiques longitudinales. Lieber [83] mesure (statiquement) une surcompensation après collage des raidisseurs ( $E_y/E_x = 2/1$ ) mais précise que le collage des chevalets vient augmenter la rigidité longitudinale de la table et donc faire diminuer le rapport d'orthotropie d'un taux supplémentaire. Wogram [126], Nakamura [93], Dérogis [46] et Weinreich [123] montrent également dans leurs études respectives qu'un modèle de plaque isotrope peut convenir pour approcher les premières résonances de leur table. Enfin, Berthaut lui-même [13], quelques pages après son calcul d'homogénéisation non satisfaisant, identifie les nombres d'ondes principaux dans les deux directions d'orthotropie  $x$  et  $y$  et observe que ceux-ci sont globalement sur une même courbe de dispersion jusqu'à environ 800-1000 Hz : il en conclut que la table (raidie et avec les deux chevalets) est isotrope pour cette bande de fréquence. En outre, la courbe obtenue est très proche de l'équation de dispersion suivant l'axe longitudinale de la plaque en épicéa non raidie ( $D_x^p k_x^4 = \rho^p h^p \omega^2$ ) ce qui laisse penser qu'au final l'ajout des barres (raidisseurs et chevalets) aboutit au même comportement vibratoire de la structure longitudinalement, mais la modifie dans la direction radiale.

Nous proposons alors d'effectuer un dernier calcul par éléments finis, où nous remplaçons naïvement la partie raidie de la table par une plaque isotrope ; les mouchoirs ne sont pas modifiés. La rigidité dynamique  $D^H/(\rho^H h^H)$  de la plaque isotrope homogène équivalente est choisie égale à celle de la plaque orthotrope en épicéa dans la direction du fil du bois qui est  $D_x^p/(\rho^p h^p) \approx 156 \text{ m}^4 \text{ s}^{-2}$ . Une nouvelle masse surfacique  $\rho_H h_H = 6.91 \text{ kg m}^{-2}$  est calculée en tenant compte cette fois de la masse des chevalets. Nous fixons arbitrairement l'épaisseur de la plaque isotrope à  $h^H = 17 \text{ mm}$  comme lors du premier calcul d'homogénéisation ce qui nous donne une masse volumique  $\rho^H = 400 \text{ kg m}^{-3}$  et un module d'Young  $E^H = 2.7 \text{ GPa}$ . La figure 4.2 compare les espacements intermodaux estimés numériquement, expérimentalement et théoriquement. On observe que les résultats numériques

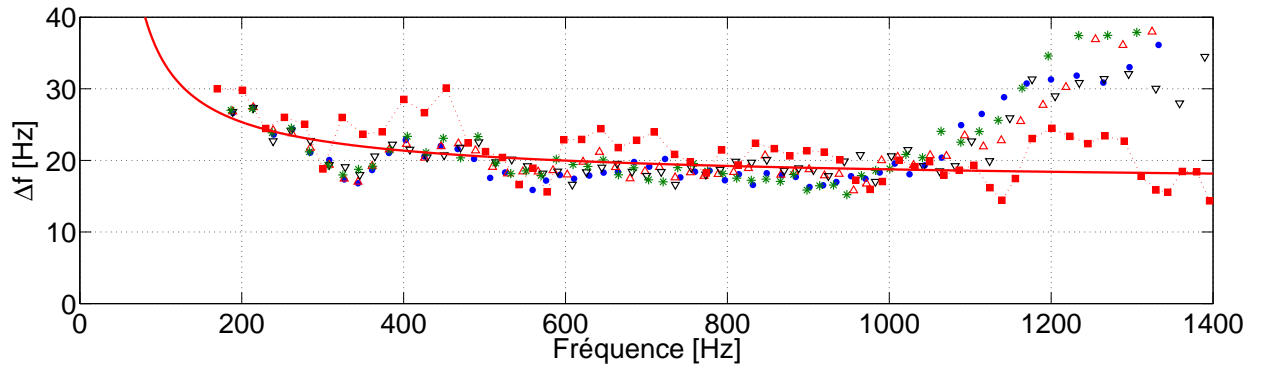


FIG. 4.2 – Comparaison des espacements intermodaux mesurés aux points aux points  $\mathbf{A}_1$  ( $\bullet$ ),  $\mathbf{A}_2$  ( $\Delta$ ),  $\mathbf{A}_3$  ( $\nabla$ ),  $\mathbf{A}_5$  ( $*$ ), calculés numériquement avec un modèle éléments finis où la table raidie est remplacée par une plaque isotrope homogène équivalente ( $\blacksquare$ ) et calculés théoriquement ( $—$ ).

sont comparables aux mesures, avec un  $\Delta f_{\text{mode}}$  d'environ 21 Hz entre 500 et 1000 Hz. Néanmoins, ici encore le modèle numérique n'est pas pleinement satisfaisant.

La densité modale théorique est approchée en sommant les densités modales de la plaque isotrope (centrale) et celles des deux mouchoirs orthotropes. Le calcul prend pour conditions aux limites le cas encasté (voir la section 1.2.3 du chapitre précédent). En théorie, le calcul de l'influence des conditions aux limites n'est valable que pour des plaques rectangulaires. Ici, nous considérons successivement trois plaques rectangulaires équivalente pour la première à la table raidie (même surface et même rapport d'aspect), et pour les deux suivantes aux deux mouchoirs.

Un argument en faveur de l'isotropie peut tenir dans l'observation des premières déformées de la structure. Celles-ci sont reproduites à la figure 4.3. On observe que le modèle numérique donne

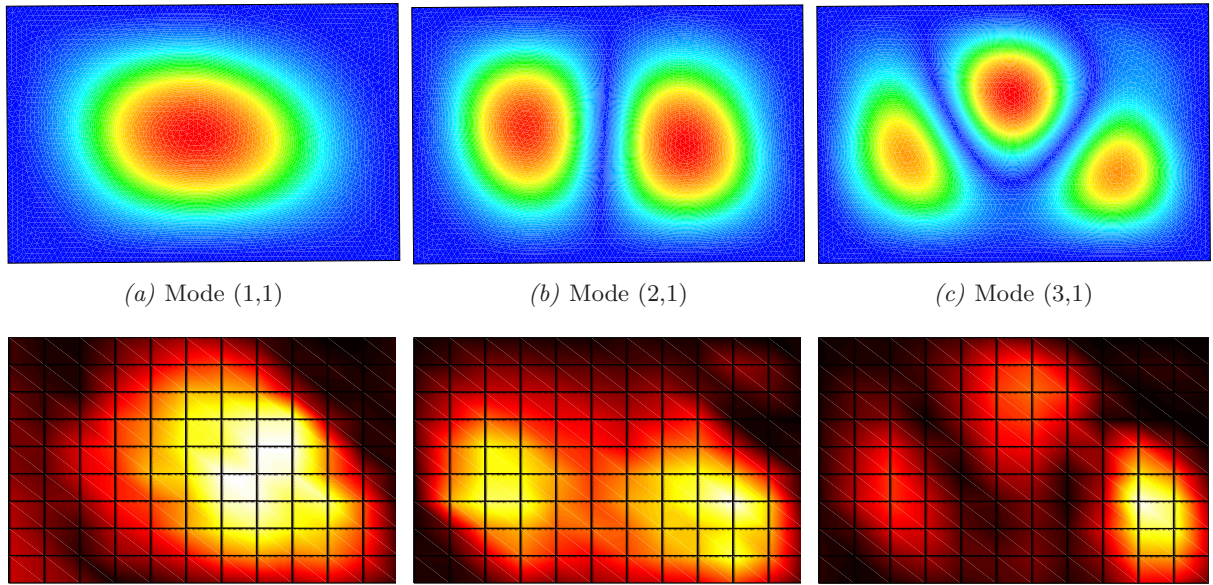


FIG. 4.3 – Comparaison des déformées des trois premiers modes *de table* calculés numériquement après remplacement de la table raidie par une plaque isotrope homogène équivalente (lignes du haut) et mesurés (lignes du bas).

pour ces premiers modes des déformées particulièrement ressemblantes à celles mesurées. La ligne nodale du mode (2,1) est parallèle au bords et le ventre central du mode (3,1) est déplacé vers le haut de la table. Les deux précédents modèles numériques donnaient des résultats sensiblement différents. Néanmoins, ici encore la précontrainte n'étant pas prise en compte dans le modèle numérique, nous ne nous attarderons pas plus sur les premières fréquences de la table, influencées par la mise en charge du piano.

Nous reproduisons enfin à la figure 4.4 la relation de dispersion des ondes de flexion dans la plaque isotrope. La fréquence critique de rayonnement (pour laquelle l'équation de dispersion dans la plaque coupe celle dans l'air) est de 1500 Hz, ce qui est conforme à l'étude expérimentale présentée au chapitre précédent. À 1160 Hz environ, la demi-longueur d'onde est égale à l'espacement inter-raidisateurs  $p$ , et la structure ne peut plus être considérée comme homogène. Nous y reviendrons en détail à la section 2.2.



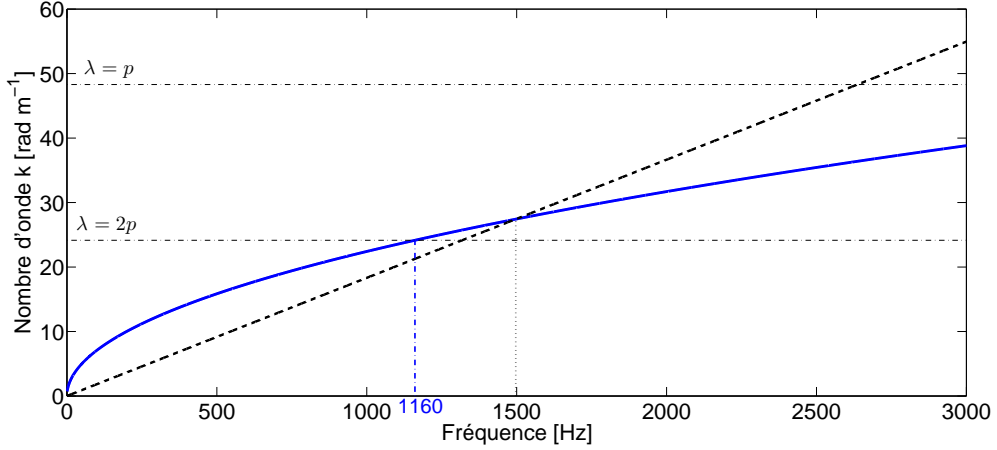


FIG. 4.4 – Courbe de dispersion de la plaque isotrope (—). Courbe de dispersion dans l'air (---). La fréquence critique de la plaque est d'environ 1500 Hz. À 1160 Hz, la demi-longueur d'onde est égale à l'espacement inter-raideurs  $p$ .

## 2 Modèle minimal

Nous construisons dans cette section une description synthétique de la table en nous basant sur les *descripteurs* que sont la densité modale, le facteur de pertes moyen et l'espacement inter-raideurs. On montre dans un premier temps comment la connaissance de la masse de la structure, de la densité modale et du facteur de pertes suffit pour approcher la valeur moyenne de l'admittance au chevalet et les enveloppes de celle-ci. Puis nous examinons dans quelle mesure à plus haute fréquence les vibrations guidées entre les raidisseurs influent sur le phénomène de coïncidence acoustique et sur le rayonnement de la table.

### 2.1 Densité modale et admittance au chevalet

Nous introduisons dans ce paragraphe le concept d'admittance au point d'excitation pour une structure finie puis nous montrons de quelle manière cette grandeur peut être reliée à la densité modale de la structure. La méthode sera illustrée sur le cas pratique de notre table d'harmonie afin d'approcher l'admittance au chevalet.

#### 2.1.1 Expressions analytiques de l'admittance mécanique<sup>4</sup> : sommation modale et *mean-value method*

**Sommation modale** – Supposons qu'une structure conservative soit soumise à une excitation ponctuelle harmonique de pulsation  $\omega$  au point de coordonnées  $(x_F, y_F)$  de la forme  $f(x_F, y_F) = F_0 \delta(x - x_F) \delta(y - y_F) \sin(\omega t)$ . On la notera  $f_F$  par la suite. En reprenant le formalisme modal présenté dans l'annexe B et avec les propriétés d'orthogonalité B.4, le déplacement  $w_A$  de la

<sup>4</sup>Ou *mobilité* mécanique.



structure au point d'observation  $(x_A, y_A)$  s'écrit<sup>5</sup>  $w_A = \sum_{\nu} \Phi_{\nu}(x_A, y_A) q_{\nu}(t)$ . La projection des efforts extérieurs sur le mode  $\nu$  s'écrit pour sa part  $f_{\nu} = \Phi_{\nu}(x_F, y_F) f_F$  d'après B.12 (force généralisée au point d'excitation). Le système de  $\nu$  oscillateurs à un degré découplés B.11 se met alors sous la forme :

$$\ddot{q}_{\nu} + \omega_{\nu}^2 q_{\nu} = \frac{\Phi_{\nu}(x_F, y_F) f_F}{m_{\nu}} \quad (4.2)$$

Après transformée de Fourier de 4.2, les déplacements généralisés notés  $Q_{\nu}(\omega)$  dans le domaine fréquentiel<sup>6</sup> sont donnés par :

$$Q_{\nu}(\omega) = \frac{\Phi_{\nu}(x_F, y_F) F(x_F, y_F)}{m_{\nu} (\omega_{\nu}^2 - \omega^2)} \quad (4.3)$$

où  $F(x_F, y_F) = F_0$  est la transformée de Fourier de  $f(x_F, y_F)$ . Le déplacement au point d'observation  $(x_A, y_A)$  s'écrit alors dans le domaine fréquentiel :

$$W(x_A, y_A, \omega) = \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{F_0 \Phi_{\nu}(x_F, y_F) \Phi_{\nu}(x_A, y_A)}{m_{\nu} (\omega_{\nu}^2 - \omega^2)} \quad (4.4)$$

On déduit de l'équation précédente, l'admittance de transfert entre les points  $(x_A, y_A)$  et  $(x_F, y_F)$  :

$$Y_{AF}(\omega) = \frac{\dot{W}(x_A, y_A)}{F(x_F, y_F)} = \frac{i\omega W_A}{F_0} = i\omega \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{\Phi_{\nu}(x_A, y_A) \Phi_{\nu}(x_F, y_F)}{m_{\nu} (\omega_{\nu}^2 - \omega^2)} \quad (4.5)$$

On retrouve bien la *propriété de réciprocité* des fonctions de transferts de type excitation-réponse [42] : l'admittance de transfert reste inchangée si l'on permute les positions d'excitation et d'observation (symétrie de la relation 4.5). L'admittance au point d'excitation s'écrit enfin pour  $(x_A, y_A) = (x_F, y_F)$  :

$$Y_A(\omega) = \frac{\dot{W}_A}{F_A} = i\omega \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{\Phi_{\nu}^2(x_A, y_A)}{m_{\nu} (\omega_{\nu}^2 - \omega^2)} \quad (4.6)$$

Considérons maintenant le cas général des systèmes amortis. Avec des facteurs de pertes de l'ordre de 1 à 3% pour notre table d'harmonie, nous considérerons comme négligeables les coefficients d'amortissement intermodaux et nous supposerons que l'hypothèse de Basile (équation B.17) est vérifiée. En posant alors  $\xi_{\nu}$  le coefficient d'amortissement modal du mode  $\nu$  et d'après les équations des déplacements généralisés des oscillateurs amortis B.18, on obtient de manière similaire au paragraphe précédent l'admittance de transfert de la structure faiblement dissipative :

$$Y_{AF}(\omega) = i\omega \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{\Phi_{\nu}(x_A, y_A) \Phi_{\nu}(x_F, y_F)}{m_{\nu} (\omega_{\nu}^2 + 2i\xi_{\nu}\omega_{\nu}\omega - \omega^2)} \quad (4.7)$$

L'admittance au point d'excitation s'écrit enfin comme la somme des admittances d'oscillateurs

<sup>5</sup>Pour plus de lisibilité et pour ne pas confondre avec la densité modale  $n(f)$ , nous avons changé de notation pour l'indice des modes :  $\nu$  ici, au lieu de  $n$ .

<sup>6</sup>On prendra comme convention de noter en majuscule les grandeurs dans le domaine fréquentiel.

amortis à un degré de liberté [31] :

$$Y_A(\omega) = i\omega \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{\Phi_\nu^2(x_A, y_A)}{m_\nu (\omega_\nu^2 + 2i\xi_\nu \omega_\nu \omega - \omega^2)} \quad (4.8)$$

**Mean-value method** – L'expression établie ci-dessus pour l'admittance au point d'excitation  $Y_A$  d'une structure soumise à une excitation ponctuelle est basée sur une représentation modale valide sur tout le spectre. C'est une expression exacte très utile pour étudier le comportement mécanique d'une structure dans le domaine des basses fréquences : les pics de résonances qui émergent de façon isolée peuvent être clairement identifiés et un petit nombre de termes de la série suffit pour rendre compte de la réponse de la structure<sup>7</sup>.

En moyennes et hautes fréquences, la réponse en fréquence de la structure tend vers un comportement continu appelé *champ diffus* (voir le chapitre 2). L'idée de Skudrzyk proposée dans [111]–[112] et théorisée sous sa forme finale dans [113] consiste à remplacer dans ce domaine fréquentiel l'expression exacte de l'admittance (somme) par une intégrale. Skudrzyk la calcule par une méthode des résidus et montre que la partie réelle de l'admittance en hautes fréquences peut s'écrire en fonction du rapport de la densité modale  $n$  et de la masse de la structure  $M_{\text{Tot}}$  seulement (voir l'équation 4.12). Comme  $n$  et  $M_{\text{Tot}}$  sont proportionnelles à la surface  $S$ , la valeur asymptotique de l'admittance ne dépend alors ni du point de l'excitation ni de la surface : la structure peut être considérée comme *infinie*, dans ce domaine fréquentiel [82]. Cette valeur asymptotique est l'*admittance caractéristique* de la structure, notée  $Y_C$ . Par *extrapolation* vers les basses fréquences, la théorie de Skudrzyk permet ensuite de prévoir la valeur moyenne ainsi que l'enveloppe de l'admittance :  $G_C = \Re(Y_C)$  vaut la moyenne géométrique fréquentielle des valeurs  $G_{\text{res}}$  à la résonance et  $G_{\text{ares}}$  à l'antirésonance. En résumé, la *méthode de la valeur moyenne* de Skudrzyk (*mean-value method*) prédit l'enveloppe, la valeur moyenne et la valeur asymptotique de l'admittance au point d'excitation d'un structure vibrante faiblement amortie. Contrairement aux méthodes statistiques du type SEA (Analyse Statistique de l'Énergie, voir chapitre 2), restreintes au domaine des hautes fréquences, celle-ci donne donc des indications sur le comportement *moyen* de la structure de la première résonance jusqu'aux fréquences plus élevées.

Nous présentons succinctement les résultats principaux obtenus par Skudrzyk et nous renvoyons le lecteur à [113] pour les démonstrations. La transformation en hautes fréquences de l'équation 4.8 en intégrale donne :

$$Y_A(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} Y_C = \int_0^{+\infty} \frac{i\omega \Phi_\nu^2(x_A, y_A) d\nu}{m_\nu (\omega_\nu^2 + 2i\xi_\nu \omega_\nu \omega - \omega^2)} = \int_0^{+\infty} \frac{i\omega \Phi_\nu^2(x_A, y_A) d\omega_\nu}{m_\nu \epsilon_\nu (\omega_\nu^2 + 2i\xi_\nu \omega_\nu \omega - \omega^2)} \quad (4.9)$$

<sup>7</sup>En dessous de sa pulsation propre  $\omega_\nu$  la contribution modale du mode  $\nu$  diminue lorsque  $\omega_\nu$  augmente. Autrement dit à une pulsation de calcul  $\omega$  donnée, la contribution des modes de rang très élevé est faible. Il est d'usage d'approximer alors la réponse de la structure par la réponse des premiers modes en effectuant une troncature modale (le seuil étant généralement fixé entre 3 et 10 fois la pulsation de calcul  $\omega$ , [13]).

où  $\epsilon_\nu = \frac{d\omega_\nu}{d\nu} = 2\pi \Delta f_\nu = \frac{2\pi}{n(f_\nu)}$  est l'espacement intermodal moyen (écrit ici pour les pulsations et correspondant à l'inverse de la densité modale  $n(\omega_\nu)$ ). On peut simplifier l'écriture du dénominateur de  $Y_C$  dans l'hypothèse d'amortissement faible. Pour l'oscillateur  $\nu$  et dans le cas faiblement dissipatif ( $\xi_\nu^2 \ll 1$ ), le terme d'amortissement  $2i\xi_\nu\omega_\nu\omega$  est négligeable devant  $\omega_\nu^2 - \omega^2$  pour tout  $\omega$  sauf au voisinage de la fréquence de résonance  $\omega_\nu$ . L'approximation introduite par Skudrzyk [111] ou Cremer *et al.* [39] consiste à écrire :

$$\omega_\nu^2 + 2i\xi_\nu\omega_\nu\omega - \omega^2 \approx \bar{\omega}_\nu^2 - \omega^2 \quad \text{avec} \quad \bar{\omega}_\nu^2 = \omega_\nu^2(1 + i\eta_\nu) \quad (4.10)$$

où  $\eta_\nu = 2\xi_\nu$  est le facteur de pertes du mode  $\nu$ . L'équation 4.9 se simplifie alors en :

$$Y_C = \int_0^{+\infty} \frac{i\omega \Phi_\nu^2(x_A, y_A) d\omega_\nu}{m_\nu \epsilon_\nu (\bar{\omega}_\nu^2 - \omega^2)} = G_C + i B_C \quad (4.11)$$

où  $G_C = \Re(Y_C)$  et  $B_C = \Im(Y_C)$ . Sous cette forme, la partie réelle de l'admittance au point d'excitation peut alors se calculer par une méthode des résidus. Le résultat s'écrit :

$$\boxed{\Re(Y_A(\omega)) \xrightarrow{+\infty} G_C = \frac{\pi}{2\epsilon_\nu M_{\text{Tot}}} = \frac{n(f)}{4M_{\text{Tot}}}} \quad (4.12)$$

Dans ce domaine fréquentiel, la partie réelle de l'admittance ne dépend que de la densité modale et de la masse de la structure. Pour une plaque mince en particulier, la partie imaginaire  $B_C$  s'annule en hautes fréquences [113] et on trouve le résultat :

$$\boxed{Y_A(\omega) \xrightarrow{+\infty} G_C = \frac{1}{8\sqrt{\rho h D}} = \frac{1}{4h^2} \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)}{E \rho}}} \quad (4.13)$$

écrit ici dans le cas isotrope.  $G_C$  équivaut à l'admittance au point d'excitation de la plaque infinie [39]. Elle ne dépend ni de la fréquence, ni de la surface mais uniquement de l'épaisseur et des constantes élastiques de la plaque. L'écriture de la relation 4.13 dans le cas orthotrope s'obtient en remplaçant la constante de rigidité  $D$  par  $D_1 \sqrt{D_3/D_1} [F(\pi/2, \alpha) 2/\pi]^{-2}$  (voir l'équation 3.17).

**Enveloppe de l'admittance** – Skudrzyk donne une expression approchée de l'enveloppe des résonances et des antirésonances. En supposant les pics bien séparés et implicitement que les masses modales de chacun des oscillateurs sont toutes égales (pics de même amplitude), on a pour l'oscillateur à un degré de liberté  $\nu$  à la résonance  $f_\nu$  :

$$G_{\text{res}} \approx \frac{1}{\eta\omega_\nu M_{\text{tot}}} = \frac{n(f_\nu)}{4M_{\text{tot}}} \frac{2}{\pi\mu(f_\nu)} = G_C \beta(f_\nu) \quad \text{avec} \quad \beta(f) = \frac{2}{\pi\mu(f)} = \frac{2}{\pi n(f)\eta f} \quad (4.14)$$

où l'indicateur  $\mu(f) = n(f)\eta f$  est le recouvrement modal (on rappelle qu'il est défini comme le rapport entre la largeur de bande à  $-3$  dB  $\eta f$  et l'espacement intermodal  $1/n(f)$ ). En général, plus la fréquence augmente, plus  $\mu$  augmente et l'amplitude des résonances décroît. Dans la

théorie de Skudrzyk,  $G_C$  est la valeur moyenne de l'admittance sur l'ensemble des fréquences (au sens d'une moyenne géométrique)  $G_C = (G_{\text{res}} G_{\text{ares}})^{1/2}$ , ce qui donne directement l'amplitude des antirésonances :

$$G_{\text{ares}} \approx \frac{G_C}{\beta(f_\nu)} = \frac{n(f_\nu)}{4M_{\text{tot}}} \frac{\pi\mu(f_\nu)}{2} \quad (4.15)$$

Il faut garder à l'esprit que ces expressions ne sont valables que pour des recouvrements modaux faibles ; c'est à dire en basses fréquences et si les résonances ne se superposent pas à une fréquence donnée. Lorsque la fréquence augmente, la contribution à l'admittance des modes voisins doit être considérée. Dans cette optique, Langley [77] modifie le calcul et évalue de manière analytique l'enveloppe de la série 4.8. Il suppose que les résonances  $f_\nu$  sont distribuées de manière régulière sur tout le spectre avec un espacement intermodal égal à l'inverse de la densité modale à la fréquence d'intérêt, ce qui s'écrit à la résonance  $f_p$  :  $f_\nu - f_p = (\nu - p)/n(f_p)$ . Sous cette hypothèse, l'enveloppe des résonances  $G_{\text{res}}$  se met sous la forme<sup>8</sup> :

$$G_{\text{res}} \approx G_C \frac{\mu(f_p)}{2\pi} \sum_{j=1-p}^{\infty} \frac{1}{j^2 + (\mu(f_p)/2)^2} \quad (4.16)$$

Il est possible de calculer cette série (en étendant la borne inférieure à  $-\infty$ ) qui s'écrit :

$$G_{\text{res}} \approx G_C \coth \left( \frac{\pi\mu(f_p)}{2} \right) \quad (4.17)$$

De manière similaire, en supposant que les minima de l'admittance apparaissent entre deux résonances successives, c'est à dire à la fréquence  $f = \frac{f_\nu + f_{\nu+1}}{2} = f_\nu + \frac{1}{2n(f_\nu)}$ , l'enveloppe des antirésonances est donnée par [77] :

$$G_{\text{ares}} \approx G_C \frac{\mu(f_p)}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(j - 1/2)^2 + (\mu(f_p)/2)^2} = G_C \tanh \left( \frac{\pi\mu(f_p)}{2} \right) \quad (4.18)$$

Pour des recouvrements modaux faibles, les relations 4.17 et 4.18 établies par Langley sont bien équivalentes à celles données par Skudrzyk :

$$\coth(\pi\mu/2) \underset{0}{\sim} 2/(\pi\mu) = \beta \quad \text{et} \quad \tanh(\pi\mu/2) \underset{0}{\sim} \pi\mu/2 = \beta^{-1}$$

En hautes fréquences, ces deux facteurs tendent vers un et l'enveloppe tend vers  $G_c$ , ce qui est cohérent avec la théorie de Skudrzyk.

---

<sup>8</sup>Langley introduit une seconde approximation au dénominateur de l'admittance. Pour  $\omega = \omega_p$ , et au voisinage de  $\omega_\nu$  :  $\omega_\nu^2 - \omega_p^2 + i\eta_p\omega_p^2 \approx (\omega_\nu + \omega_p)(\omega_\nu - \omega_p) + i\eta_p\omega_p^2 \approx 2\omega_p(\omega_\nu - \omega_p) + i\eta_p\omega_p^2$  ce qui permet d'écrire  $G_{\text{res}} \approx \Re \left[ \frac{1}{M_{\text{Tot}}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\eta_p\omega_p^3 + 2i\omega_p^2(\omega_\nu - \omega_p)}{4\omega_p^2(\omega_\nu - \omega_p)^2 + \eta_p^2\omega_p^4} \right]$

### 2.1.2 Application

La figure 4.5 présente la partie réelle de l'admittance synthétisée (relation 4.8) d'une structure amortie dont on a choisi la densité modale asymptotique et la masse égales à celles mesurées sur notre table d'harmonie<sup>9</sup> :  $n_\infty = 1/19.5$  modes  $\text{Hz}^{-1}$  et  $M = 9$  kg. Le facteur de pertes est supposé le même pour chaque mode ; on le fixe à  $\eta = 2\%$  (d'après nos mesures). Pour ce premier calcul, les résonances sont supposées régulièrement espacées (ce qui n'est bien sûr pas vérifié en un point particulier quelconque) et toutes les masses modales égales. L'admittance synthétisée tend bien

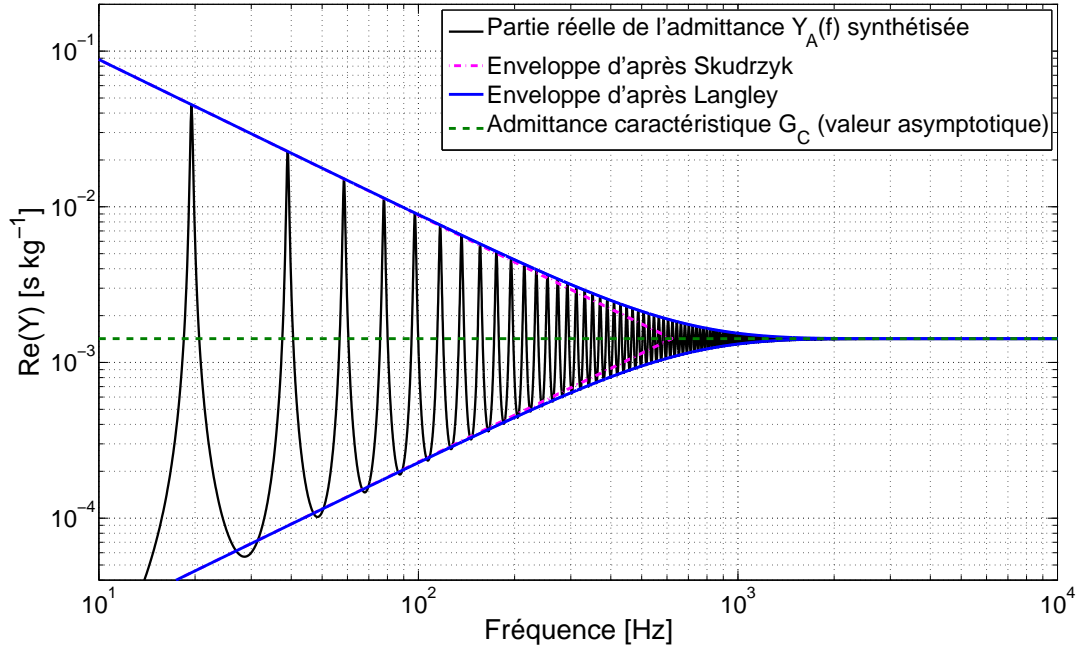


FIG. 4.5 – Partie réelle de l'admittance au point d'excitation  $Y_A(f)$  (—) synthétisée pour une structure faiblement amortie dont on a supposé les résonances régulièrement espacées. L'espacement intermodal, la masse et les facteurs de pertes de la structure sont ceux mesurés sur notre table d'harmonie. L'admittance caractéristique  $G_C$  (— —) est calculée d'après la méthode de la valeur moyenne de Skudrzyk [113], et les enveloppes des résonances et antirésonances sont données par Skudrzyk (— · —) et Langley (—) [77].

vers l'asymptote théorique de la plaque. En outre, l'enveloppe de l'admittance donnée par Langley coïncide sur tout le spectre avec les résonances et antirésonances de l'admittance synthétisée. On observe que l'approximation de Skudrzyk est valable pour des fréquences inférieures à  $\approx 200$  Hz ce qui correspond à des recouvrements modaux  $\mu$  inférieur à 20% (espacement intermodal égal à plus de cinq fois la largeur de bande à  $-3$  dB).

Le calcul de Langley suppose que les résonances de la structure soient régulièrement espacées ; c'est à dire sans fluctuations *aléatoires* des espacements intermodaux successifs. Si cette hypo-

<sup>9</sup>Pour ce calcul la masse correspond à la masse totale de la table : 4 kg pour la plaque en épicea supposée d'épaisseur constante, 2.1 kg pour les chevalets, 1.7 kg pour les raidisseurs et 1.2 kg pour les deux barres de mouchoirs.

thèse est assez bien vérifiée par les structures unidimensionnelles telles que les poutres, ce n'est pas le cas des structures bidimensionnelles telles que les plaques. En pratique on peut observer pour ces structures des dégénérescences, des fréquences répétées et donc une irrégularité de l'espacement intermodal. Ceci affecte de manière significative l'enveloppe de la réponse en fréquence. Langley propose alors d'introduire des modifications semi-empiriques dans ses relations 4.17 et 4.18 pour tenir compte de ces irrégularités dans le cas bidimensionnel. L'approche adoptée est tirée de la littérature traitant de la répartition statistique des résonances en acoustique des salles (voir Bolt [20]-[21] ou Sepmeyer [110]). Langley fait l'hypothèse que les espacements intermodaux sont régis par une loi de probabilité de type *loi de Poisson*. Il obtient alors l'expression suivante pour l'amplitude des résonances d'une structure bidimensionnelle supposée rectangulaire (le calcul complet figure dans [77]) :

$$G_{\text{res}} \approx G_C (1 + \mu_2^{-1/2}) \coth \left( (1 + \mu_2^{-1/2}) \frac{\pi \mu_2}{2} \right) \quad (4.19)$$

où le recouvrement modal  $\mu_2 = [1 - (L_1 L_2)^{-1}] \mu$  a été modifié pour tenir compte des fréquences répétées. Il s'écrit en fonction des nombres entiers  $L_1$  et  $L_2$  reliés au facteur d'aspect de la structure<sup>10</sup> (supposée rectangulaire) par  $L_2/L_1 = L_y/L_x$ . L'amplitude des antirésonances s'écrit :

$$G_{\text{ares}} \approx G_C K \tanh \left( K \frac{\pi \mu_2}{2} \right) \quad (4.20)$$

où le facteur  $K$  est donnée par la formule semi-empirique :

$$K = \begin{cases} 1/2.3 & \text{si } \mu_2 < 1 \\ \frac{1 + \mu_2 - \sqrt{\mu_2}}{2.3 + \mu_2 - 1} & \text{si } \mu_2 \geq 1 \end{cases} \quad (4.21)$$

Illustrons les calculs de Langley dans le cas de notre table d'harmonie. Nous la modélisons ici comme une plaque homogène isotrope rectangulaire, d'épaisseur constante, de dimension  $L_x = 1.39$  m,  $L_y = 0.91$  m et de masse totale  $M = 9$  kg. Sa masse surfacique vaut alors  $\rho h = 7.1$  kg m<sup>-2</sup>. Par ailleurs connaissant sa densité modale (mesurée) on trouve sa rigidité de flexion  $D = S^2 \rho h / (4 n_\infty^2) = 1081$  N m où  $S = L_x L_y$  est la surface de la plaque. Pour ce calcul, les conditions aux limites sont supposées de type simplement supporté et les fréquences propres sont calculées analytiquement. Contrairement au cas précédent, leur répartition spectrale est donc irrégulière. Les déformées modales sont celles données à la relation 3.3 ; les masses modales sont égales à  $M/4$ . Nous présentons à la figure 4.6 l'admittance au point d'excitation, synthétisée en un point du chevalet des médiums : ici en  $(4L_x/5, 5L_y/6)$  par exemple. On trouve une valeur moyenne de l'admittance entre 100 et 1000 Hz d'environ  $1.3 \cdot 10^{-3}$  s kg<sup>-1</sup> ce qui correspond à une impédance d'environ 800 kg s<sup>-1</sup>. Cette valeur est tout à fait cohérente avec les mesures d'impédance au chevalet publiées par Wogram [126] où Giordano [55] : ces auteurs trouvent une impédance

<sup>10</sup>Par exemple, la pulsation propre  $\omega_{mn}$  d'une plaque rectangulaire isotrope de facteur d'aspect  $L_y/L_x = L_2/L_1$  sera répétée si  $L_2 n/L_1$  et  $L_1 m/L_2$  sont entiers.

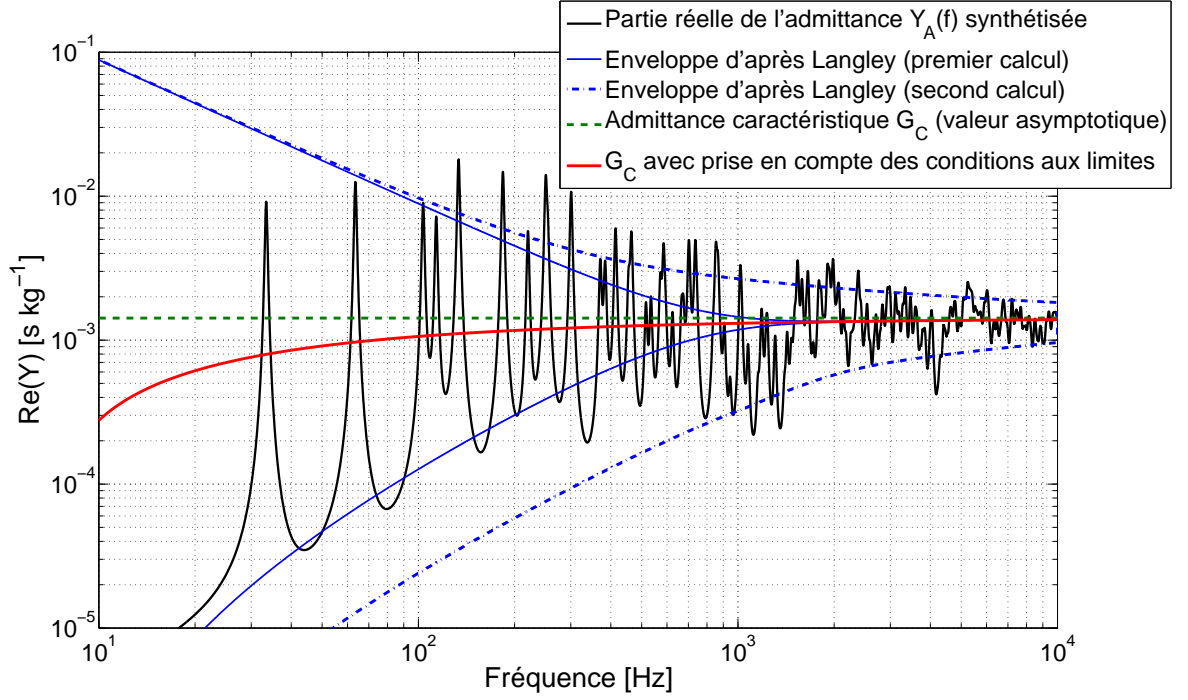


FIG. 4.6 – Partie réelle de l'admittance  $Y_A(f)$  synthétisée en un point du chevalet de la table d'harmonie supposée isotrope et aux conditions aux limites simplement supportées. Afin de tenir compte de l'irrégularité de l'espacement intermodal, l'enveloppe de  $\Re(Y_A)$  (—) est modifiée de manière semi-empirique en (---) d'après [77]. Aux basses fréquences, la valeur moyenne  $G_C$  (—) s'écarte de l'asymptote (---) à cause de l'influence des conditions aux limites particulières de type simplement supportée.

moyenne de l'ordre de  $10^3 \text{ kg s}^{-1}$  (voir la section 2.3 du chapitre 1). De plus les fluctuations de l'admittance dans cet intervalle fréquentiel sont de  $\pm 10\text{-}15 \text{ dB}$  ce qui est également cohérent avec les mesures publiées. Concernant l'enveloppe de l'admittance, on observe que celle donnée par le premier calcul de Langley sous-estime très vite l'amplitude des oscillations de l'admittance. Les modifications semi-empiriques apportées corrigent partiellement l'allure de l'enveloppe qui devient tout à fait satisfaisante après 1 kHz environ. Cependant il ne faut pas oublier que ce modèle simpliste n'est plus valable dans le cas de notre table passé 1100 Hz : les demi-longueurs d'ondes devenant inférieures à l'espacement inter-raideurs.

Cette approche montre néanmoins la voie à suivre pour une synthèse efficace de l'admittance au chevalet du piano, utilisable à des fins de synthèse sonore par exemple, ou pour étudier le couplage et le transfert d'énergie entre la corde et la table d'harmonie. Une mesure précise des fréquences, amortissements et déformées modales le long du chevalet permettrait de reproduire par sommation modale l'admittance vue par la corde. Cependant ces mesures s'avèrent compliquées à mettre en œuvre. La matrice d'admittance au point de contact entre la corde et le chevalet est tridimensionnelle. Une mesure correcte supposerait de connaître les termes de la matrice dans chacune des directions. Une démarche similaire à celle adoptée par Lambourg et Chaigne [76] qui mesurent l'admittance au chevalet d'une guitare suivant les deux directions (normale et dans l'axe



du chevalet) pourrait être envisagée.

## 2.2 Guide d'onde *inter-raideurs* en moyennes et hautes fréquences

Intéressons-nous maintenant au comportement de la structure au-dessus de 1.1 kHz, lorsque les ondes sont localisées entre les raidisseurs.

### 2.2.1 Construction du modèle - Relation de dispersion du guide et densité modale

Un espace inter-raideurs typique est représenté à la figure 4.7. Si le contraste en raideur et en masse spécifique est très marqué entre les raidisseurs et la plaque d'épicéa, cet espace peut être considéré, en première approximation, comme un guide d'onde de largeur  $p$  et de longueur  $L_y$ .

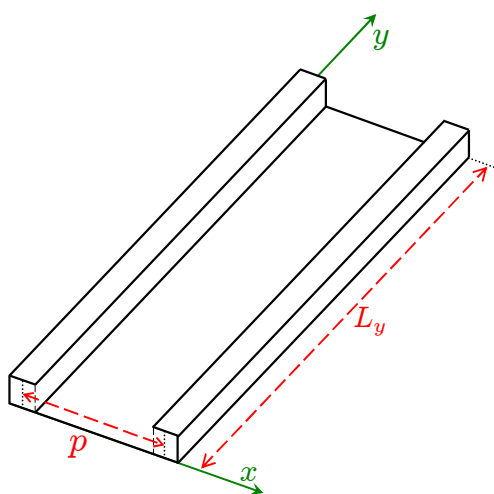


FIG. 4.7 – L'espace délimité par deux raidisseurs successifs peut être considéré en hautes fréquences comme un guide d'onde *fini*.

Étant données les irrégularités géométriques et les incertitudes sur les caractéristiques mécaniques de la table, nous adoptons un modèle plus simple que celui donné par Ichchou *et al.* [71] (voir la section 2.2.2 du chapitre 1) :

- L'équation de dispersion des ondes dans la planche inter-raideurs est celle d'une plaque orthotrope en flexion.
- Les nombres d'ondes dans la direction perpendiculaire aux raidisseurs sont imposés par  $p$  :  $k_{x_m} = m\pi/p$  avec  $m \in \mathbb{N}^*$  (un nombre d'onde par mode transverse). L'observation numérique (figure 4.9) de vibrations en opposition de phase pour deux guides d'ondes côte à côte confirme bien ce choix. Les raidisseurs sont donc supposés occuper des lignes nodales de flexion. Ils ne sont pas nécessairement fixes pour autant : la rotation leur est autorisée. Implicitement, cette situation correspond à une condition aux limites sur la ligne des raidisseurs de type simplement supporté. Dans la réalité, le couplage entre la vibration des raidisseurs et celle de la plaque entre eux se traduit par un spectre spatial en  $k_x$  plus compliqué qu'une seule raie par mode transverse.

- Les nombres d'ondes  $k_{y_n}$  dans la direction parallèle aux raidisseurs sont imposés par les conditions aux limites imposées par les barres de mouchoirs ou par la ceinture.

Nous nous proposons de donner l'équation de dispersion de ce milieu bidimensionnel que constitue la planche entre les raidisseurs. Celle-ci s'écrit :

$$k_y^4 + k_y^2 \frac{D_2 + D_4}{D_3} k_{x_m}^2 + \frac{D_1}{D_3} k_{x_m}^4 - \frac{\rho h \omega^2}{D_3} = 0 \quad (4.22)$$

où les  $D_i$  sont les constantes de rigidité de l'épicéa, considéré comme matériau orthotrope d'axes  $x$  et  $y$  (les expressions des  $D_i$  sont données à l'équation A.6).

C'est une équation du second degré en  $k_y^2$ . Posons  $A = \frac{D_2 + D_4}{D_3} k_{x_m}^2$ ,  $B = \frac{D_1}{D_3} k_{x_m}^4$  et  $C = \frac{\rho h}{D_3}$ . La relation 4.22 se réécrit alors :

$$k_y^4 + A k_y^2 + B - C \omega^2 = 0$$

et l'équation de dispersion des ondes propagatives dans le milieu s'écrit finalement :

$$k_y = \pm \left( \frac{\sqrt{A^2 + 4C\omega^2 - 4B} - A}{2} \right)^{1/2} \quad (4.23)$$

La pulsation  $\omega_{cp,m} = \sqrt{B/C} = \left( \frac{m\pi}{p} \right)^2 \sqrt{\frac{D_1}{\rho h}}$  est la pulsation de coupure basse pour le mode transverse  $m$ . En dessous de cette pulsation, il n'y a pas de solution réelle. Les ondes sont évanescences dans la direction  $y$ . On peut noter que lorsque  $\omega$  tend vers  $+\infty$  on retrouve bien la branche de dispersion des ondes de flexion se propageant suivant  $y$  puisque  $k_{x_m}$  devient négligeable par rapport à  $k_y$  :

$$k_y(\omega) \xrightarrow{+\infty} C^{1/4} \sqrt{\omega} = \sqrt{\omega} \left( \frac{\rho h}{D_3} \right)^{1/4} \quad (4.24)$$

La densité modale à  $k_{x_m}$  donné (c'est à dire pour un mode transverse  $m$  de guide donné) peut être calculée de manière similaire à ce qui a été fait pour la plaque (section 1.2 du chapitre précédent), mais en considérant cette fois le milieu comme unidimensionnel. On suppose les nombres d'ondes  $k_{y_n}$  approchés par  $n\pi/L_y$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ . En remplaçant le  $k$ -espace par un  $k$ -axe, chaque nombre d'onde  $k_{y_n}$  occupe une longueur égale à  $\pi/L_y$ . Le nombre de modes (de pulsation inférieure à  $\omega$  et de nombre d'onde réel positif) s'écrit alors  $N(\omega) = k_y(\omega)L_y/\pi$  et la densité modale :

$$n(\omega) = \frac{dN}{dk_y} \frac{dk_y}{d\omega} = \frac{L_y}{\pi} \frac{\sqrt{2} C \omega}{\sqrt{A^2 + 4C\omega^2 - 4B} \left( \sqrt{A^2 + 4C\omega^2 - 4B} - A \right)^{1/2}} \quad (4.25)$$

En hautes fréquences on retrouve bien la densité modale – décroissante en  $\omega^{-1/2}$  – d'une poutre

de longueur  $L_y$  :

$$n(\omega) \xrightarrow{+\infty} \frac{L_y}{\pi} \frac{C^{1/4}}{2\sqrt{\omega}} = \frac{L_y}{2\pi\sqrt{\omega}} \left( \frac{\rho h}{D_3} \right)^{1/4} \quad (4.26)$$

La figure 4.8 présente la densité modale estimée  $n(f) = 2\pi n(\omega)$  en fonction de la fréquence pour chacun des quatre guides d'onde inter-raideurs où nous avons effectué des mesures (points  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$ ,  $\mathbf{A}_3$  et  $\mathbf{A}_5$ , représentés sur la figure 3.13). Elle est calculée en fixant  $k_{x_m}$  à la valeur  $\pi/p$  avec  $p$  l'espacement inter-raideurs local. Les résultats expérimentaux sont également reportés, ainsi que les valeurs asymptotiques des densités modales des *plaques* inter-raideurs correspondantes (calculées avec l'équation 3.10).

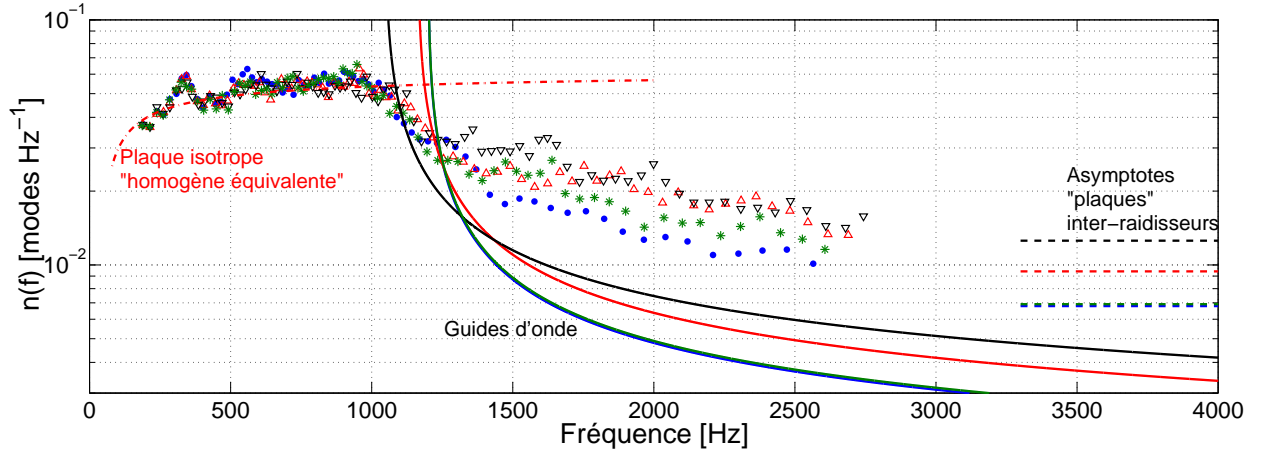


FIG. 4.8 – Densités modales mesurées aux points  $\mathbf{A}_1$  ( $\bullet$ ),  $\mathbf{A}_2$  ( $\triangle$ ),  $\mathbf{A}_3$  ( $\nabla$ ),  $\mathbf{A}_5$  ( $*$ ) et calculées pour le premier mode de guide d'onde  $(1, n)$  de l'espace inter-raideurs correspondant (—, avec la couleur correspondante). On a également représenté les valeurs asymptotiques des densités modales des plaques inter-raideurs (—, avec la couleur correspondante), ainsi que la densité modale de la plaque isotrope homogène équivalente encastrée ( $-\cdot-$ ) considérée au paragraphe 1.3.

Les densités modales mesurées au-dessus de 1.5 kHz semblent décroître à une vitesse comparable à celle prévue par notre modèle mais sont supérieures d'un facteur 2-3. Pour un espace inter-raideurs donné, nous mesurons plus de résonances sur la table qu'il n'en existe pour le guide d'onde considéré comme isolé. En fait comme nous l'avons dit plus haut la table doit être vue pour ces fréquences comme un *réseau* de guides d'onde parallèles entre eux. L'hypothèse que nous faisons lorsque nous considérons chaque guide d'onde indépendamment des autres est réductrice et peut expliquer ces différences avec les mesures. La figure 4.9 présente la déformée modale du 74<sup>ème</sup> mode obtenue avec le modèle en éléments finis de la table raidie (section 3 du chapitre 3) où nous avons représenté le signe de la phase (les zones rouges et les zones bleues sont en opposition de phase). On voit que les trois guides d'ondes au centre de la table (entre les raidisseurs 5 et 8, en partant de la gauche) ne sont pas isolés les uns des autres : les espaces inter-raideurs voisins vibrent en opposition de phase et les raidisseurs sont globalement des nœuds de vibrations. Ce résultat numérique confirme donc le comportement de la table pour ces fréquences : un mode

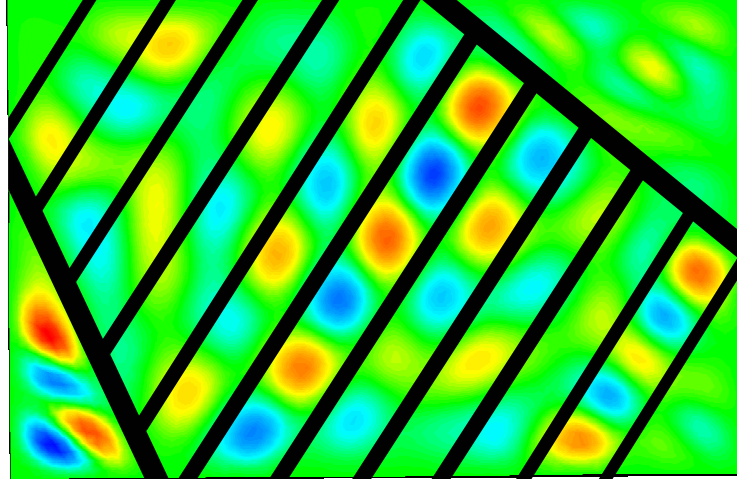


FIG. 4.9 – Déformée modale du 74<sup>ème</sup> mode numérique à  $f_n = 1593 \text{ Hz}$ . Le signe de la phase est compris dans l’amplitude modale : les zones rouges et les zones bleues sont en opposition de phase.

mobilise principalement un guide et les guides adjacents de manière atténuée. Cette sorte de diaphonie entre guides de longueurs (et, dans une certaine mesure, de largeurs) différentes justifie que les nombres de modes observés dans un guide est 2 à 3 fois plus grand que dans un guide isolé.

Par ailleurs il confirme le choix de l’espacement inter-raideurs  $p$  comme celui de la période des raidisseurs, autrement dit de l’espacement des fibres neutres de deux raidisseurs consécutifs (voir la figure 4.7).

Sur la figure 4.8 le fait que les accéléromètres proches de l’extrémité de la table (points **A<sub>1</sub>** et **A<sub>5</sub>**) voient moins de modes que ceux situés plus au centre (**A<sub>2</sub>** et **A<sub>3</sub>**) est également cohérente : aux bords de la structure il y a moins de guides d’ondes qui sont excités qu’au centre de la table.

Enfin, à plus hautes fréquences, on peut s’attendre à ce que la densité modale mesurée pour chaque guide d’onde tende vers une constante qui est celle de la plaque inter-raideurs correspondante (en pointillés sur la figure 4.8).

### 2.2.2 Conséquences sur le rayonnement

La présence des raidisseurs a des conséquences importantes sur le rayonnement de la table d’harmonie. Au-dessus de 1.1 kHz, les ondes ne se propagent plus sur la plaque mais dans un guide d’onde où le phénomène de coïncidence acoustique est complètement différent. Nous reproduisons à la figure 4.10 la courbe de dispersion du guide d’onde (2-3) où est placé l’accéléromètre **A<sub>5</sub>**. Ce guide d’onde est placé dans l’aigu du piano. Les cordes dont les points de couplage avec le chevalet sont placés sur ce guide sont les triplets **Do<sub>5</sub>** à **Sol<sub>5</sub>** de fréquences fondamentales allant de 1100 à 1570 Hz environ. Les modes *de cordes* de ces triplets (y compris les fondamentales) excitent de manière préférentielle cet espace inter-raideurs particulier. On voit sur la figure que les ondes de flexion se propageant dans le guide sont supersoniques jusqu’à 1350 Hz environ, avant de devenir subsoniques jusqu’au second mode de guide à 4800 Hz environ, qui lui est toujours

supersonique. En d'autres termes, on peut se retrouver dans une situation où la table rayonne *moins* au-dessus de la fréquence de coïncidence (jusqu'au second mode de guide) qu'en basses fréquences. Ce comportement est tout à fait différent de celui des plaques et pourrait expliquer le fait que le timbre de l'instrument n'est pas satisfaisant dans l'aigu. Ainsi si l'on considère par exemple le triplet **Ré<sub>5</sub>** de fréquence fondamentale 1245 Hz environ, le facteur d'amortissement par rayonnement de la fréquence fondamentale serait supérieur (ondes supersoniques) aux facteurs d'amortissement des deux partiels suivants, inférieurs à 4800 Hz<sup>11</sup>. *Ces partiels pourraient donc sonner plus longtemps que la fondamentale !* Le timbre risquerait alors d'apparaître comme trop *aigrelet* pour cette note aigüe de l'avant-dernière octave<sup>12</sup> de l'instrument.

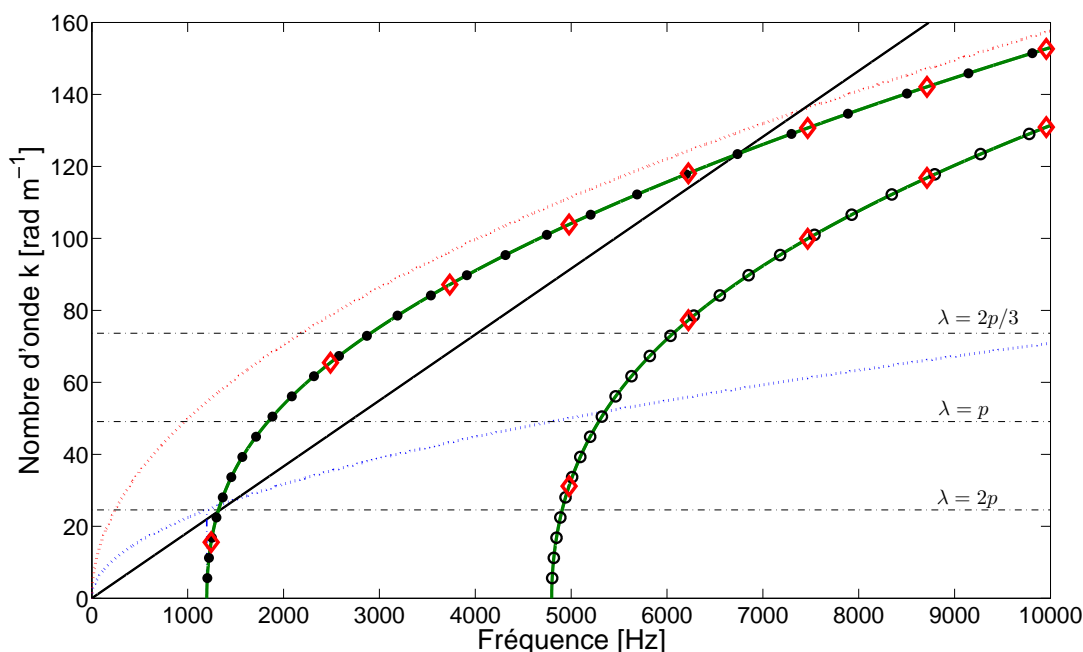


FIG. 4.10 – Courbes de dispersion des ondes de flexion dans la plaque orthotrope ( $\cdots$  suivant  $x$  et  $\cdots$  suivant  $y$ ), dans l'air (—) et pour les deux premiers modes transverses du guide d'onde (— et —) entre les raidisseurs 2 et 3. On a rajouté les valeurs discrètes correspondantes aux modes de guide d'onde (1,n) en  $\bullet$  et (2,n) en  $\circ$ , ainsi que les partiels supposés parfaitement harmoniques du triplet **Ré<sub>5</sub>** en  $\diamond$ .

Par ailleurs, ces considérations peuvent expliquer les amortissements relativement faibles que nous avons relevés sur notre table même à des fréquences élevées (voir la section 2.3 du chapitre précédent). Les facteurs d'amortissements subissaient une nette augmentation aux alentours de 1.2-1.5 kHz, puis semblaient sous-estimés au dessus du domaine critique (entre 1800 et 3000 Hz environ). L'influence du rayonnement ne devenait alors plus visible et les amortissements étaient de l'ordre de grandeur des pertes internes du bois. Avec le formalisme exposé ici, on voit que

<sup>11</sup>Au-dessus, les deux modes de guide sont excités. L'amortissement par rayonnement ré-augmenterait alors.

<sup>12</sup>Il est intéressant de noter que les triplets dont les fondamentales sont supérieures à la première fréquence de coupure basse des guides d'ondes ( $\approx 1160$  Hz) sont tous situés sur les deux dernières octaves du piano qui souffrent le plus – de l'avis des facteurs de piano et des pianistes – d'un timbre insatisfaisant.

ces modes sont en fait des modes de guide d'onde, *subsoniques* pour ces fréquences et donc peu rayonnants.

## 3 Discussion sur les facteurs susceptibles d'influencer la sonorité dans l'aigu

Cette section a pour objectif de discuter une piste pour l'amélioration sonore de la table d'harmonie dans l'aigu. Notre analyse s'articule autour de deux points étroitement liés entre eux dans ce domaine fréquentiel : le rayonnement et la mobilité au chevalet.

### 3.1 Rayonnement dans l'aigu

Nous avons montré au paragraphe 2.2 que l'espacement inter-raideurs  $p$  apparaît comme un paramètre clé du rayonnement de la table dans l'aigu. Les petites longueurs d'ondes ne se propagent plus sur la table, mais sont guidées localement entre les raidisseurs, ce qui change l'équation de dispersion et le phénomène de coïncidence acoustique. Une question qui se pose est alors : quel parti sonore pourrait-on tirer d'une diminution de l'espacement inter-raideurs (et de l'épaisseur de la table) dans l'aigu du piano ?

Le timbre dans l'aigu peut être insatisfaisant si l'amortissement de certains partiels de cordes dû au rayonnement est *anormalement* faible. Une solution serait alors de diminuer l'espacement inter-raideurs  $p$  ainsi que l'épaisseur  $h$  de la plaque d'épicéa afin de déplacer *vers la droite* les courbes de dispersion des modes de guides d'onde. La figure 4.11 présente l'évolution des courbes de dispersion du guide d'onde 2-3 (situé dans l'aigu de l'instrument) pour différents espacements inter-raideurs et différentes épaisseurs de la planche inter-raideurs. On voit sur la figure que pour un espacement  $p$  de 9.3 mm (soit environ 3-4 cm de moins que l'espacement original) et une épaisseur  $h$  de 7 mm la courbe de dispersion du guide d'onde reste *toujours supersonique*. Par conséquent, avec cette configuration, il ne peut plus y avoir de partiels de rang élevé subsonique et le son de *cloche* relativement déplaisant dans l'aigu de l'instrument pourrait ainsi être amélioré.

Au sein de la manufacture Baldwin, Conklin [34] a mené une étude sur l'influence des raidisseurs dans le timbre de l'instrument (voir la section 2.2 du chapitre 1). L'auteur a construit un piano à queue de concert dont la table d'harmonie présente environ 2 fois plus de raidisseurs que la normale (39 contre 17 à l'origine), plus proches les uns des autres d'environ un facteur 2 (un espacement  $p$  de 5 à 6 cm au maximum contre environ 13 cm à l'origine) de mêmes épaisseurs (2.5 cm) mais plus fins (1.1 cm contre 2.5 cm à l'origine) afin de ne pas changer la rigidité en flexion de la table. La première fréquence de coupure basse des guides d'onde est pour la nouvelle table de Conklin égale à la fréquence fondamentale du dernier triplet du piano (**Do<sub>8</sub>** de fréquence fondamentale d'environ 4186 Hz) ; c'est l'objectif que l'auteur s'est fixé pour le dimensionnement de sa table. Les conclusions de Conklin énoncées dans son brevet [34] vont dans le même sens que les nôtres : sa nouvelle table d'harmonie a *amélioré l'uniformité du son et le timbre dans l'aigu*.

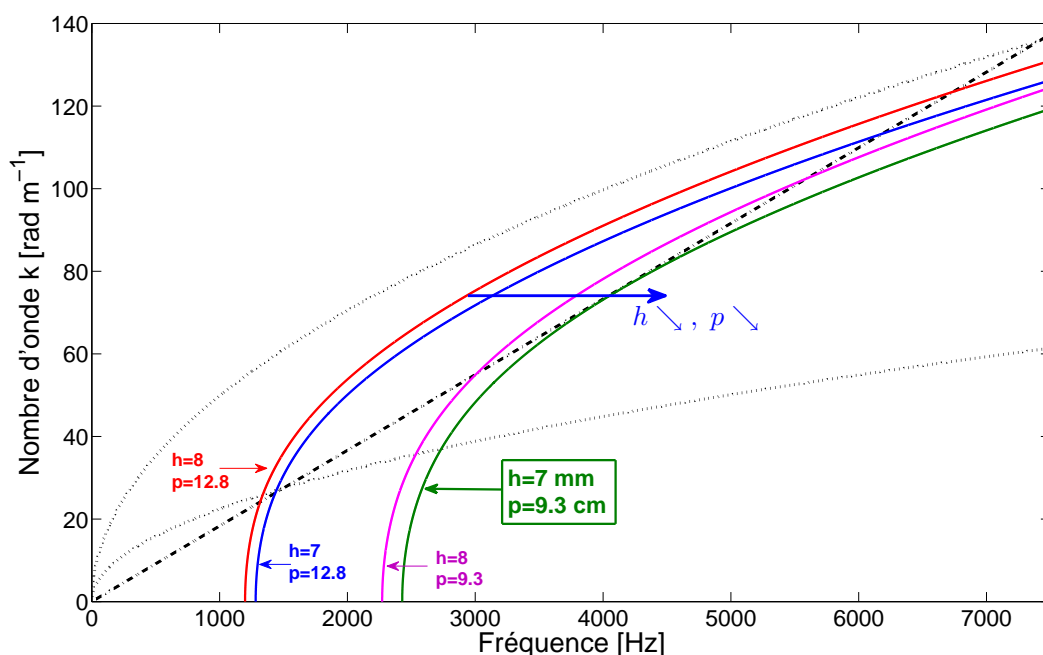


FIG. 4.11 – Influence de la réduction de l'espacement inter-raideurs  $p$  (en cm) et de l'épaisseur  $h$  (en mm) de la plaque en épicea sur l'équation de dispersion du premier mode de guide d'onde et sur le rayonnement. Courbes de dispersion dans la plaque orthotrope ( $\cdots$ ), dans l'air ( $-\cdot-$ ), et pour le premier mode de guide d'onde avec différentes valeurs de  $p$  et  $h$  (—, avec la couleur correspondante).

L'influence de la propagation guidée sur le rayonnement dans l'aigu semble claire.

Une nouvelle question se pose alors : si les raidisseurs altèrent le timbre dans l'aigu, pourquoi ne pas remplacer la table raidie par une plaque plane homogène où les raidisseurs seraient réellement *fondus* dans la table ?

Un élément de réponse est lié selon nous à *l'inadaptation* de mobilité dans l'aigu entre la corde et la table.

### 3.2 Mobilité de la table dans l'aigu

Le compromis intensité sonore/tenue temporelle dans l'aigu de l'instrument en particulier constitue une difficulté majeur à laquelle le facteur de piano doit faire face. Du point de vue de la corde, la table possède une très forte impédance d'entrée. L'énergie est donc piégée au sein de la corde et ne se diffuse que lentement à la table d'harmonie lors des réflexions successives des impulsions de la corde.

Une plaque homogène (équivalente en basses fréquences à la table raidie) présenterait une mobilité trop faible en hautes fréquences aux cordes aiguës. Une simple variation d'épaisseur sur la table ne pourrait pas suffire à présenter la même souplesse que celle que présente la table inter-



raidisseurs aux cordes aiguës sur une table raidie. La réponse de la structure en hautes fréquences risquerait alors de sembler trop faible. En d'autres termes, si l'on diminue trop l'espacement inter-raidisseurs  $p$ , l'impédance restera trop élevée dans l'aigu.

À ce propos, les conclusions de Conklin paraissent contradictoires. Il semblerait que sa nouvelle table avec plus de raidisseurs ait également amélioré la puissance acoustique émise dans l'aigu ! Conklin précise que ce piano permet l'utilisation de marteaux plus mous (afin de diminuer le son percussif dans l'aigu) tout en gardant un niveau sonore correct. Néanmoins nous pensons que ces considérations sont à prendre avec précautions. Aucune mesure n'a été publiée et la table n'a semble-t-il pas été commercialisée. Elle présentait sûrement certains défauts non rapportés par l'auteur.

Sur la table que nous avons étudiée, l'impédance moyenne passerait en théorie d'environ  $800 \text{ kg s}^{-1}$  avant localisation des ondes à une valeur – à  $2500 \text{ Hz}$  par exemple – environ 3.5 fois plus basse, de l'ordre de  $230 \text{ kg s}^{-1}$ . Cette valeur est calculée avec la formule donnée par Skudrzyk (4.12) pour le premier mode transverse du guide d'onde 2-3, d'épaisseur  $h = 8 \text{ mm}$  de longueur  $L_y = 0.55 \text{ m}$  et de densité modale  $n = 4 \cdot 10^{-3} \text{ modes Hz}^{-1}$  à  $2500 \text{ Hz}$ . Cette valeur d'impédance est tout à fait comparable aux mesures publiées par Giordano [55] par exemple, dans l'aigu et entre deux raidisseurs (voir la section 2.3 du chapitre 1).

En résumé la table semble donc obéir dans l'aigu à des exigences qui peuvent s'avérer antagonistes : la recherche d'une mobilité élevée ( $p$  pas trop petit) et d'un timbre plus homogène ( $p$  pas trop grand). L'espacement des raidisseurs apparaît donc comme un paramètre central.

Malheureusement nous ne pourrions pas aller plus loin dans l'analyse. La construction d'une table modèle sur laquelle l'influence des modifications de structure pourrait être directement mesurée nous paraît indispensable pour poursuivre cette étude et envisager une possible amélioration sonore de l'instrument.

## 4 Remplacement de la table d'harmonie par une structure en matériau composite

Dans cette dernière section nous examinons la possibilité d'un remplacement de la table d'harmonie de piano par une table en matériau composite. Premièrement une rapide synthèse des précédentes études sur la substitution de l'épicéa dans les instruments de musique est menée. L'exemple concret d'une étude menée sur le violon est présentée puis le cas du piano est envisagé.

### 4.1 Substitution de l'épicéa par un matériau composite dans les instruments de musique

Le remplacement des tables d'harmonie d'instruments à cordes par des structures en matériau composite est un sujet qui passionne les luthiers et les facteurs de piano. Le principal défi est de

trouver un matériau qui puisse reproduire les remarquables propriétés vibratoires du bois et en particulier de l’épicéa : une forte rigidité longitudinale pour une très faible densité, et de faibles facteurs de pertes viscoélastiques (voir l’étude détaillée à la section 1.2 du chapitre 1).

Plusieurs motivations existent en faveur d’une substitution du *bois de résonance* dans les instruments de musique :

- Le bois est très sensible aux variations d’humidité ambiante et de température (on dit que le bois *travaille*). Le gonflement excessif des table d’harmonies ayant subis des niveaux d’humidité trop importants ou des changements climatiques brusques peut entraîner l’apparition de fissures dans le bois voire même l’affaissement irrémédiable de la table. La bonne stabilité hygroscopique des matériaux composites permet ainsi d’éviter les modifications des propriétés vibratoires au fil du temps.
- Les propriétés mécaniques du bois varient beaucoup d’un échantillon à l’autre, même au sein d’une même essence ; à l’inverse, celles des composites sont homogènes et parfaitement identifiées. Une modélisation prédictive est donc envisageable, autorisant une répétabilité dans la fabrication et permettant ainsi de simplifier (et d’accélérer) considérablement le travail *empirique* du luthier.
- Certains bois destinés à la facture instrumentale de haute qualité sont rares, et sont considérés comme des ressources naturelles non renouvelables. Cet argument *écologique* est fondamental et sera sûrement prépondérant dans les années à venir.
- Le coût de revient d’une table en matériau composite peut être beaucoup plus faible qu’une table de bonne qualité en bois de résonance (cet argument va de pair avec les deux précédents).

Ainsi, l’attrait pour les matériaux composites en acoustique musicale s’inscrit bien dans un besoin réel et ne réside pas dans la recherche de nouvelles sonorités ou l’invention de nouveaux instruments.

Depuis les années 1970-1980 et grâce aux travaux de Haines en particulier sur la caractérisation des bois destinés à la lutherie [58] une multitude de brevets ont été publiés sur la substitution du bois mais relativement peu d’entre eux sont concluants et basés réellement sur une approche analytique du problème. Une revue exhaustive de toutes les tentatives de remplacement de l’épicéa par des matériaux composites sortirait du cadre de cette thèse. Nous ne citerons ici que deux travaux publiés qui nous paraissent principaux et qui peuvent s’appliquer aussi bien aux instruments de la famille du violon, qu’à la guitare. Le cas du piano est semble-t-il plus délicat ; nous y reviendrons plus tard.

Cherchant à maximiser le module d’Young longitudinal  $E_L$  tout en minimisant la masse volumique  $\rho$  de la structure, Haines [59] montre l’utilité d’une structure de type *sandwich* dont les peaux seraient en matériau composite à très fort module d’Young (tissus de fibre de carbone par exemple) et dont l’âme serait faite d’un matériau très léger (du simple *carton* dans son cas). Une table d’harmonie de violon faite de la structure sandwich proposée par Haines reproduit fidèlement les facteurs de pertes viscoélastiques de l’épicéa mais semble manquer de puissance acoustique

rayonnée comparée à la structure d’origine en épicéa (niveau inférieur d’environ 5 à 10 dB). Récemment Schleske [107] a proposé une manière efficace d’augmenter d’un taux supplémentaire le coefficient de rayonnement  $R = (\sqrt{E_L E_R} / \rho^3)^{1/2}$  en diminuant la masse de la structure sandwich sans changer sa rigidité. La solution consiste à creuser l’âme du sandwich en certaines zones de la table où l’amplitude vibratoire est maximale afin d’augmenter artificiellement en ces points l’admittance et donc la puissance de rayonnement. Si dans le cas du violon ces zones peuvent être assez clairement définies – situées au dessus et en dessous des ouïes, au niveau des quatre *joues* de l’instrument [107] – cette solution nous apparaît difficilement applicable à la table d’harmonie du piano dont toute la surface participe au rayonnement.

Le matériau composite vers lequel se sont tournés naturellement les fabricants d’instruments de musique est la fibre de carbone pour son fort module d’Young, de l’ordre de 150-200 GPa dans le sens des fibres. Les luthiers que nous avons pu rencontrer et qui ont eu entre leurs mains de tels instruments rapportent le plus souvent *un manque de clarté*, des *sons se mélangeant* voire pour les plus mauvais instruments de *sons de cloche*. Les très faibles facteurs de pertes viscoélastiques du matériau carbone – de l’ordre de 0.2% d’après McIntyre et Woodhouse [90] – peuvent dénaturer le son de l’instrument. La solution donnée par Haines, couplant les fibres de carbone avec un matériau très léger et aux pertes viscoélastiques plus importante est semble-t-il la solution idéale. La principale difficulté consiste dès lors à trouver la proportion appropriée entre les deux matériaux.

#### 4.2 Exemple d’étude sur la table d’harmonie du violon – Remplacement de la structure par un sandwich balsa/fibre de lin

Avant de nous intéresser au cas du piano à proprement parler, nous présentons une étude concrète effectuée sur le violon. Ce travail a été mené dans le cadre d’un module expérimental (mécanique / matériaux composites) de l’école polytechnique, en collaboration avec Jean-François Caron (Institut Navier-ENPC), Stéphane Marcadet (X07) et Hugo Martin (X07). Les principaux résultats sont regroupés dans [88].

L’originalité de ce travail repose dans la recherche d’une même densité modale asymptotique (à surface donnée) entre la table de substitution en matériau composite et la table d’harmonie d’origine en épicéa, tout en conservant au mieux la position des premières fréquences propres. Par ailleurs la structure doit comme précédemment vérifier les critères énoncés plus haut : un coefficient de rayonnement élevé et des facteurs de pertes viscoélastiques comparables à ceux de l’épicéa.

Nous avons opté pour une structure sandwich dont l’âme est en balsa ( $\rho_{\text{balsa}} \approx 170 \text{ kg m}^{-3}$ ) et dont les peaux sont formées chacune d’un empilement de couches de fibre de lin pré-imprégnées (résine époxy). Plus légère que la fibre de carbone ou la fibre de verre, et qui plus est d’origine naturelle, les fibres végétales nous ont parus constituer une alternative intéressante aux matériaux composites habituellement utilisés dans la facture instrumentale. L’épaisseur de l’âme, le nombre de couches de fibre de lin et l’angle d’orientation des fibres ont été déterminés par un calcul

d’optimisation sous contraintes<sup>13</sup> dont les objectifs sont le coefficient de rayonnement, l’espacement intermodal moyen et la première fréquence de torsion de la table en épicéa. Ces valeurs ont été mesurées sur la table en épicéa après détablage et retrait de la barre de table ; elles sont données au tableau 4.3. La structure sandwich optimale consiste finalement en une âme de 1 mm de balsa et un empilement symétrique équilibré sur chacune des faces de deux couches de fibre de lin orientés à  $\pm 15^\circ$  (chacune des couches fait environ 0.15 mm). On a reporté dans le même tableau 4.3 les caractéristiques mécaniques de la table en composite (les mesures sont effectuées avant les finitions du luthier).

	Table d’origine en épicéa	Table en matériau composite
$E_L$	11.5 GPa	17.6 GPa
$E_R$	0.47 GPa	4.2 GPa
$G_{LR}$	0.5 GPa	3.9 GPa
$\rho$	392 kg m <sup>-3</sup>	540 kg m <sup>-3</sup>
$\Delta f$	74 Hz	71 Hz
$R = (\sqrt{E_L E_R} / \rho^3)^{1/2}$	6.2 m <sup>4</sup> kg <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup>	7.4 m <sup>4</sup> kg <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup>
$f_{\text{tor}}$	80 Hz	82 Hz
Épaisseur moyenne	2.9 mm	1.6 mm
Masse total	61 grammes	48 grammes

TAB. 4.3 – Comparaison des caractéristiques mécaniques et vibratoires de la table d’origine en épicéa et de la table en matériau composite. Les modules d’Young et de cisaillement de l’épicéa sont tirés de la littérature ; ceux de la structure sandwich sont donnés par un modèle de plaque multicouche. La masse volumique, l’espacement intermodal moyen  $\Delta f$  et la fréquence du mode de torsion  $f_{\text{tor}}$  sont mesurés.

Le protocole de fabrication de la table en composite est le suivant :

- Détablage, retrait de la barre de table, puis fabrication d’un moule en silicone de la table d’harmonie d’origine (dont on a bouché auparavant les ouïes).
- Séparation des deux faces du moule, remplissage de celui-ci par la structure sandwich (voir la figure 4.12), et cuisson.
- Finitions par le luthier : perçage des ouïes, collage de la barre de table, vernissage, collage de la table sur le violon d’origine et enfin pose de l’âme du violon et du chevalet.

Le violon final ainsi que la table d’harmonie d’origine sont présentés à la figure 4.13. La table en composite est conforme aux attentes : les premières fréquences propres et les densités modales asymptotiques des deux tables sont particulièrement proches (voir le tableau 4.3). La table en composite est par ailleurs plus fine et plus légère que l’originale (d’environ 20%). Les luthiers ayant joué sur l’instrument<sup>14</sup> rapportent que *la qualité du son est bonne* : le son est *doux, plaisant, agréable*, le violon est *facile à jouer*. L’instrument sonne *comme un violon* mais comparé à un

<sup>13</sup>Dans ce calcul, un modèle de plaque de Reissner multicouche est utilisé pour modéliser la structure sandwich [28]. En pratique l’optimisation est faite de la sorte : pour une épaisseur de balsa et un nombre de couches de lin donné, on cherche l’angle d’orientation des fibres qui minimise l’écart aux objectifs. L’empilement est supposé symétrique équilibré pour éviter la déformation de la plaque multicouche lors de la cuisson.

<sup>14</sup>À ce propos, nous remercions vivement ALOCA Lutherie ainsi que l’atelier Champarnaud et Depierre pour le temps qu’ils nous ont accordé, leur aide et les conseils précieux qu’ils nous ont donnés.

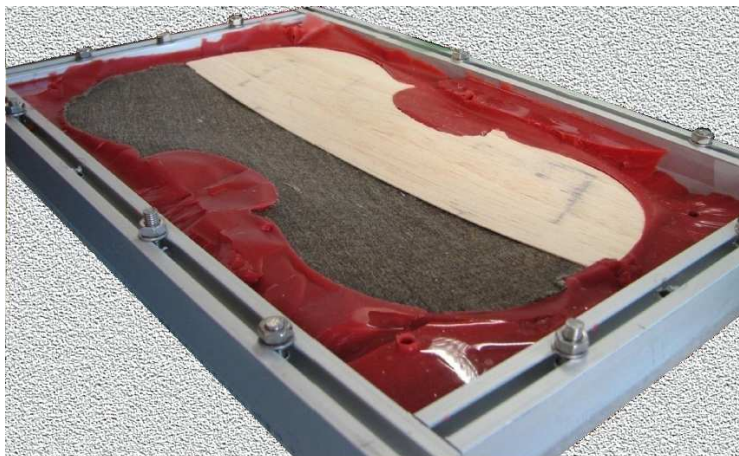


FIG. 4.12 – Conception de la table d'harmonie en matériau composite. Les couches de fibre de lin (en gris sur la photo) et l'âme en balsa (en blanc) sont empilées dans le moule en silicone de la table d'harmonie d'origine (le moule est formé de deux faces).

instrument de bonne qualité il ne *porte pas* assez, ne *projette pas* assez ; le son est *dedans*, comme un peu trop étouffé.



FIG. 4.13 – Violon *fini* dont la table d'harmonie d'origine en épicéa (à droite sur la photo) a été remplacée par une structure sandwich balsa/fibre de lin.

Nous reproduisons au tableau 4.4 les facteurs de pertes viscoélastiques de la table en composite (mesurés sur la table libre avant les finitions du luthier) ainsi que ceux de la table d'origine. Les pertes internes du sandwich balsa/fibre de lin sont supérieures d'environ 1-1.5% à celles de l'épicéa. L'énergie vibratoire perdue dans la table en composite est trop importante ; cette observation confirme les remarques des luthiers. Une solution pour diminuer ces facteurs de pertes consisterait

à baisser la proportion de balsa (dont l’amortissement est grand) mais cela risquerait d’augmenter trop la masse volumique de la structure, ce qui n’est pas recherché. Une autre serait de coupler la

	Fréquence [Hz]	Facteur de pertes (en %)
Table d’origine en épicéa	80	2.5
	145.5	2.4
	231.5	2.2
	970	2.1
Table en balsa/fibre de lin	82	3.4
	130	3.5
	440	3.6
	1167	4.7
Plaque en balsa/fibre de carbone	265	1.2
	806	0.56
	1159	0.78

TAB. 4.4 – Facteurs de pertes viscoélastiques estimés pour différentes fréquences propres de la table d’origine, de la table en balsa/fibre de lin et d’une plaque balsa/carbone.

fibre de lin à la fibre de carbone qui possède des facteurs de pertes très inférieurs, voir le tableau 4.4 (une plaque sandwich faite d’une âme de 1 mm et de 3 couches de fibre de carbone sur chacune des surfaces est testée ; elle présente des facteurs de pertes de l’ordre de 0.5-1%). Néanmoins il faut souligner que le manque de puissance rayonnée ne doit pas être nécessairement imputable à la table seulement. L’instrument est un violon d’étude bas de gamme, le support de l’instrument est *moyen* selon les luthiers. Dès lors, rien ne nous dit *a priori* que le violon d’origine (avant détablage) sonnait mieux. Malheureusement nous n’avons pas effectué de mesure sur le violon monté de sa table d’harmonie en épicéa, ni recueilli d’avis de luthier sur la sonorité de celui-ci.

### 4.3 Solutions envisageables pour le piano

Le cas du piano apparaît comme plus difficile à appréhender que les instruments de la famille du violon ou la guitare. Les grandes dimensions de la table et l’importante charge des cordes aux chevalets auxquelles on se trouve être confronté rendent complexes l’élaboration d’une structure de remplacement. Comparé aux autres instruments à cordes, il existe d’ailleurs relativement peu de tentatives de substitution de la table. À notre connaissance, les principales sont celles de Bert [12], Yamada *et al.* [128], Schwichtenberg [109] et Kaman *et al.* [72]. L’étude de Bert semble être la plus aboutie : elle consiste à remplacer la table par une structure sandwich de type nid d’abeille (résine phénolique) renforcé par des peaux en matériau plastique. Un prototype fut construit : selon l’inventeur les facteurs de pertes de la table sont faibles et la réponse en hautes fréquences est particulièrement bonne, ce qui est tout à fait notable puisque recherché par les facteurs de piano. Conklin précisera plus tard – sans qu’il n’en connaisse la raison exacte – que cette tentative qui semblait encourageante ne fût malheureusement pas commercialisée [4].

Nous n’avons pas eu le temps au cours de cette thèse d’élaborer une table d’harmonie de



piano en matériaux composites. Néanmoins deux voies d'études nous paraissent envisageables de poursuivre :

- Les résultats que nous avons établis précédemment laissent penser que la table d'harmonie du piano peut être considérée comme isotrope jusqu'à environ 1 kHz. Une solution envisageable serait donc d'homogénéiser réellement la structure, en *fondant* les raidisseurs dans la table (c'est d'ailleurs la solution retenue par Bert [12]). Les caractéristiques statiques, et le comportement vibratoire jusqu'à 1 kHz seraient conservés, à condition bien sûr de reproduire la même densité modale que la structure initiale<sup>15</sup>. Mais deux restrictions apparaissent. La première est que les chevalets eux ne peuvent pas être fondus dans la structure ; on voit difficilement comment les cordes pourraient transmettre efficacement l'énergie vibratoire à la table sans une pièce surélevée par rapport au plan de cordes, ni comment le croisement de cordes serait possible sans chevalets. Or l'isotropie de la table résulte des effets conjugués des raidisseurs et des deux chevalets. On peut dès lors émettre de sérieux doute sur la validité d'un remplacement de l'ensemble {table, raidisseurs} seulement ; le collage des chevalets dans un second temps modifierait grandement la réponse de la table. Mais la restriction majeure a déjà été évoquée plus haut : une plaque homogène équivalente en basses fréquences présenterait une impédance trop importante en hautes fréquences et la réponse du piano dans l'aigu risquerait alors de sembler trop faible.
- La seconde solution, qui nous paraît plus appropriée, est similaire à ce que nous avons entrepris sur le violon à la section 4.2. L'idée serait de remplacer seulement la plaque en épicéa non raidie (le voile) ; les raidisseurs et les chevalets seraient rajoutés par la suite sur la table en matériau composite. Plusieurs avantages existent par rapport à la précédente proposition. La table composite ne serait pas *figée*, le facteur pouvant jouer sur ses caractéristiques locales en changeant les dimensions des raidisseurs, leur nombre, leur position et ainsi modifier l'espacement inter-raideurs  $p$ . Par ailleurs le bombé initial pourrait être donné à la table de manière similaire à ce qui est fait d'habitude en collant des raidisseurs préalablement *cintrés*. Dès lors on voit bien que le savoir-faire du facteur resterait indispensable. Enfin les raidisseurs et les chevalets eux-mêmes pourraient être conçus en matériaux composites afin de réduire efficacement la quantité importante d'épicéa que demande la conception d'une table d'harmonie de piano de bonne qualité<sup>16</sup>.

Pour conclure cette section, le remplacement de l'épicéa par un matériau composite n'est pas impossible. De multiples études menées sur les instruments d'archet et les guitares en sont des exemples concrets. Malgré les réserves émises sur l'amortissement de la structure sandwich que nous avons retenue, l'étude présentée ici s'avère prometteuse et montre de quelle manière il est possible de substituer l'épicéa sans dénaturer le timbre du violon. L'approche qui est de conserver la densité modale de la structure s'avère tout à fait pertinente ; elle peut être étendue à n'importe

---

<sup>15</sup>Les facteurs de piano ne procèdent pas à un réglage précis des premières fréquences propres des tables d'harmonies, contrairement à ce que font les luthiers de violon par exemple. *A priori* on peut considérer que la conservation de la densité modale est suffisante pour garder le timbre de l'instrument.

<sup>16</sup>Les arbres d'épicéa ayant un tronc de grand diamètre (supérieurs à 3 m) sont de plus en plus rares. D'après Conklin, s'il y a encore une quarantaine d'années une table d'harmonie de piano à queue pouvait être conçue entièrement avec le bois d'un seul arbre, ce n'est plus le cas aujourd'hui [35].



quel autre instrument à corde. Dans le cas du piano, il est plus judicieux de ne pas chercher à homogénéiser la structure, mais de remplacer la table, les raidisseurs et les chevalets séparément.

## 5 Conclusion

Nous avons donné dans ce dernier chapitre une description synthétique de la table d’harmonie de piano.

En basses fréquences nous avons montré qu’un modèle simple de plaque isotrope – où la rigidité de flexion serait égale à celle de la plaque orthotrope en épicéa non raidie dans le sens du fil du bois – permet de retrouver la densité modale observée au chapitre précédent et donne des premières déformées modales très proches des mesures.

Nous montrons ensuite dans quelle mesure il est possible de retrouver l’admittance moyenne au chevalet ainsi que l’enveloppe des résonances et des anti-résonances connaissant seulement la masse de la structure, la densité modale et le facteur de pertes moyen.

Au-dessus de 1.1 kHz, les ondes sont partiellement localisées entre les raidisseurs ; la table raidie apparaît comme un réseau de guides d’onde juxtaposés côte à côte. On montre alors que le phénomène de coïncidence acoustique se trouve modifié par rapport au rayonnement classique des plaques minces : certains partiels de cordes peuvent être subsoniques, sonner anormalement longtemps, et altérer le timbre dans l’aigu. L’amélioration du son peut être envisagée en jouant sur le rayonnement et la mobilité. Ces deux grandeurs apparaissent comme très étroitement liées à l’espacement inter-raideurs et l’épaisseur de la table dans l’aigu.

Enfin le chapitre se conclut par une étude portant sur le remplacement du matériau *bois* par un matériau composite. La substitution d’une table d’harmonie du violon par une structure sandwich balsa/fibre de lin donne des résultats globalement satisfaisants : la qualité du son du violon en composite est bonne, même si la puissance acoustique rayonnée semble un peu faible. La démarche consiste à reproduire une table ayant la même densité modale que la table d’harmonie d’origine, la même position des premières fréquences propres, un coefficient de rayonnement élevé et des facteurs de pertes viscoélastiques comparable à ceux de l’épicéa. Elle nous paraît tout à fait transposable au cas du piano.

# Conclusion générale et perspectives

## Conclusion

Ce travail de recherche s'inscrit dans la compréhension de la physique du piano et poursuit l'objectif ambitieux de la modélisation du comportement vibratoire de la table d'harmonie. Pièce centrale dans le fonctionnement du piano, le rôle de la table est de rayonner efficacement le son. À travers le choix du matériau en particulier, elle joue un rôle essentiel dans le timbre, la *qualité sonore* et la *couleur du son* du piano. Dès lors, l'étude vibratoire et vibroacoustique du comportement dynamique de cette structure apparaît comme fondamentale. Les objectifs de notre travail étaient multiples : avancer dans la compréhension, la mesure, et la modélisation de cette structure complexe pour tenter d'aider les facteurs de piano à mieux connaître leur instrument et à améliorer ou faire évoluer la conception des tables d'harmonie.

La première partie de notre travail a consisté à effectuer une synthèse bibliographique approfondie sur les vibrations et le rayonnement de la table. Celle-ci a mis en évidence, entre autres, le peu de résultats expérimentaux disponibles au-dessus de 200 Hz. Mis à part le travail d'analyse récent mené par Berthaut et quelques observations (rarement systématiques ou objectivées) basées sur l'analyse des mesures de mobilité au chevalet, le comportement vibratoire de la table reste encore très mal compris dans le domaine des moyennes fréquences.

Un enjeu majeur résidait donc dans la mesure précise de paramètres vibratoires globaux de la structure comme l'amortissement ou la densité modale dans le domaine des moyennes fréquences. Afin d'y répondre nous avons développé une nouvelle méthode d'analyse modale haute résolution basée sur des techniques existantes de traitement du signal (méthodes dites *sous-espaces*) et permettant de s'affranchir des limitations en termes de résolution spectrale de la transformée de Fourier. Fondée sur le critère de sélection de l'ordre de modélisation ESTER et l'algorithme ESPRIT, la méthode permet d'identifier avec une grande précision les paramètres modaux des systèmes vibratoires linéaires libres naturellement amortis. Nous l'avons *validée* sur des cas tests – plaques minces en aluminium – et pour des domaines fréquentiels à recouvrement modal élevé (analyses modales partielles au voisinage de la fréquence critique de rayonnement par exemple). Cette étape de validation a permis, entre autres, de justifier l'approche modale dans le domaine des moyennes fréquences où l'hypothèse de champs vibratoire diffus n'est pas vérifiée.

Appliquée à une table d'harmonie de piano droit, la méthode haute résolution a permis

d'étendre avec succès l'identification des paramètres modaux vers les moyennes et hautes fréquences. L'observation des premières déformées modales de la table obtenues par excitation impulsionnelle – au marteau d'impact – a mis en évidence notamment l'influence de la ceinture sur le comportement basse fréquence de la table d'harmonie. Limité par le mauvais rapport signal à bruit au-dessus de 500-600 Hz, une seconde analyse modale par excitation continue de la structure par sinus glissant logarithmique a permis d'étendre jusqu'à environ 2.5 kHz l'estimation des fréquences et amortissements modaux. Au passage, nous avons quantifié la validité de l'hypothèse de linéarité toujours effectivement, souvent implicitement, mais très rarement validée. Les principaux résultats expérimentaux résident dans l'observation d'une densité modale globalement constante jusqu'à 1.1 kHz environ puis d'une nette chute de celle-ci pour des fréquences supérieures. Ceci suggère que la table raidie se comporte dans un premier temps comme une plaque homogène pour des longueurs d'ondes grandes devant l'espacement inter-raideurs avant d'apparaître, à plus hautes fréquences, comme une juxtaposition de guides d'onde. L'observation, pour ces fréquences, des déformées modales obtenues par un modèle en éléments finis de l'ensemble {table, raidisseurs, mouchoirs} confirme la localisation des ondes entre les raidisseurs (nœuds de vibration).

Un apport important de cette thèse a consisté à proposer une description synthétique de la table d'harmonie. Nous avons montré qu'une plaque homogène isotrope dont la rigidité de flexion est égale à celle de la plaque orthotrope en épicéa non raidie dans le sens du fil du bois permet d'approcher le comportement vibratoire de la table pour des fréquences inférieures à 1.1 kHz : premières déformées modales et densité modale semblables aux mesures. Puis on montre de quelle manière il est possible de calculer l'admittance au chevalet ainsi que son enveloppe (résonances et antirésonances) connaissant seulement la densité modale, le facteur de pertes moyen et la masse de la table.

Enfin notre étude fournit un résultat notable sur le rayonnement de la table lorsque les ondes sont guidées entre les raidisseurs. Nous avons montré que le phénomène de coïncidence acoustique pouvait être modifié par rapport au rayonnement classique des plaques minces et que le premier mode transverse de guide d'ondes pouvait rayonner *moins* au-dessus de la fréquence de coïncidence qu'en basses fréquences. Une conséquence directe est que certains partiels de cordes pourraient sonner anormalement longtemps et altérer le timbre dans l'aigu. Ce comportement, qui demande à être confirmé par des mesures supplémentaires, semble être ignoré des facteurs de piano. Nous montrons alors de quelle manière il serait possible de jouer sur le rayonnement et la mobilité dans l'aigu en modifiant localement l'espacement inter-raideurs et l'épaisseur de la table.

## Perspectives

La méthode d'analyse modale haute résolution que nous avons mise au point semble prometteuse dans l'analyse vibratoire des structures naturellement amorties. Depuis son développement, elle a montré son efficacité dans d'autres études vibratoires menées au Laboratoire de Mécanique des Solides. L'une d'entre elle est par exemple l'identification des caractéristiques mécaniques (mo-

dules d'Young, de cisaillement) et des facteurs de pertes viscoélastiques d'une structure sandwich type nid d'abeille à partir de la mesure précise des fréquences et amortissements modaux<sup>17</sup>.

Concernant la table d'harmonie du piano, un axe de travail qui doit être développé porte sur la synthèse sonore. Une perspective à court terme consisterait à calculer un son représentatif de l'instrument à partir des paramètres vibratoires globaux de la table identifiés dans notre travail, des vibrations de la corde<sup>18</sup> et des conditions aux limites de celle-ci au chevalet (matrice d'admittance). Un outil permettant d'évaluer les variations sonores entraînées par une modification des paramètres de conception (modification de structures ou de matériaux) pourrait alors être envisagé. L'influence de la position des raidisseurs, de l'épaisseur locale, du matériau utilisé pourrait être étudiée.

Parallèlement à la simulation numérique un autre axe de travail serait de construire une *table-modèle* dont la fonction serait de mesurer l'effet des modifications de structure sur les descripteurs globaux. Le dimensionnement de la table pourrait se faire en fonction des critères des facteurs de piano en termes de *niveau sonore* et de *tenue de son* sur toute la tessiture du clavier. Ce travail s'inscrirait dans une *aide à la conception de pianos de qualité*.

Enfin il nous paraît tout à fait concevable de remplacer la table d'harmonie du piano par une structure en matériau composite, en suivant une démarche similaire à l'étude que nous avons menée sur le violon, mais à condition d'arriver à reproduire avec précision – et plus fidèlement que ce qui a été fait – des amortissements comparables aux pertes internes de l'épicéa.

Pour conclure, n'oublions pas que c'est bien le *pianiste* qui est le premier concerné par l'évolution de son instrument. Une étude scientifique correcte sur les possibles améliorations du son du piano ne saurait faire abstraction du droit de regard (et d'écoute!) de l'instrumentiste.

---

<sup>17</sup>Thèse de Marc Rébillat sur l'*Évolution d'un système de restitution sonore spatialisé de type "Wave Field Synthesis" pour les applications de réalité virtuelle multimodale en contexte multi-utilisateur* en partenariat avec le LIMSI (encadrée par Xavier Boutillon, Brian Katz, et en collaboration avec Étienne Corteel de *sonic emotion*).

<sup>18</sup>Mentionnons à ce propos la thèse de Juliette Chabassier en cours à l'INRIA et à l'UME-ENSTA (encadrée par Patrick Joly et Antoine Chaigne) portant sur la *Simulation numérique de la vibration de cordes non linéaires de piano*, dans le but de modéliser un piano complet.



## Annexe A

# Vibrations en flexion des plaques élastiques

Cette section introduit dans un premier temps le concept de plaque mince en flexion dans le cadre des hypothèses de Love-Kirchhoff pour des plaques orthotropes. Dans un second temps, le modèle plus général de Reissner-Mindlin décrivant les vibrations des plaques épaisses est présenté. Cette section est fortement inspirée des ouvrages de Graff [56] et Gérardin et Rixen [57].

## 1 Plaque mince – Modèle de Love-Kirchhoff

**Hypothèses** – Les hypothèses cinématiques de Love-Kirchhoff adoptées généralisent à deux dimensions les hypothèses d'Euler-Bernoulli appliquées aux poutres sans déformation à l'effort tranchant. Elles sont les suivantes :

1. La plaque est mince : d'épaisseur  $h$  petite devant les dimensions moyennes de la plaque.
2. Le matériau est élastique linéaire.
3. Seul le déplacement transversal  $w$  est considéré.
4. La contrainte  $\sigma_z$  dans la direction transversale est nulle (elle doit en effet s'annuler sur les faces extérieures de la plaque, et celle-ci étant mince, il est naturel d'admettre qu'elle est nulle en tout  $z$ ).
5. Les sections droites, perpendiculaires à la fibre neutre au repos, restent planes et normales à celle-ci au cours du mouvement. La déformation en cisaillement transverse est négligée (voir la figure A.1).
6. L'inertie de rotation des sections droites est négligée.
7. Les composantes axiales de déplacement proviennent de la rotation de la section droite.

Ainsi, le champ de déplacement dans la plaque s'écrit :

$$u(x, y, z, t) = -z \phi_x \approx -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad v(x, y, z, t) = -z \phi_y \approx -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad , \quad w(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (\text{A.1})$$

où  $u$  et  $v$  sont les déplacements dans le plan,  $w$  est le déplacement transverse,  $\phi_x$  et  $\phi_y$  les rotations des sections par rapport à la fibre neutre (voir la figure A.1).

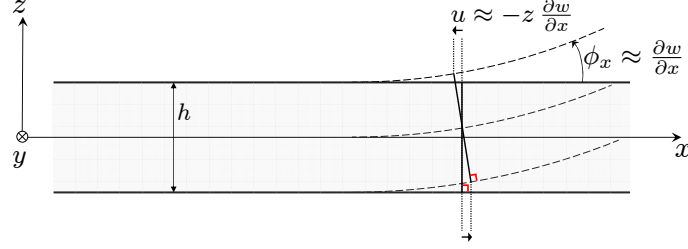


FIG. A.1 – Hypothèse cinématique d'Euler-Bernoulli : au cours du mouvement, les sections droites restent planes et normales à la fibre neutre.

**Relations contraintes déformations** – Les composantes du tenseur des déformations linéarisé  $\bar{\epsilon}$  s'écrivent alors en coordonnées cartésiennes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \\ \epsilon_{yz} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.2})$$

Considérons maintenant le cas particulier des plaques orthotropes (plaque comportant deux axes de symétrie à angle droit). Cette hypothèse de symétrie s'applique à une grande variété de types de matériaux, comme le bois en particulier, ou les matériaux composites. On suppose de plus que les axes du repère  $(O, x, y, z)$  coïncident avec les axes de symétrie du matériau et que la plaque est taillée suivant ses axes d'orthotropie : ces plaques sont dites *orthotropes spéciales* [75]. La loi



de Hooke conduit alors à la relation suivante entre contraintes et déformations planes suivantes :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}} & \frac{\nu_{yx} E_x}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}} & 0 \\ \frac{\nu_{xy} E_y}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}} & \frac{E_y}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}} & 0 \\ 0 & 0 & 2 G_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

où  $E_x$  est le module d'Young dans la direction  $x$ ,  $E_y$  le module d'Young dans la direction  $y$ ,  $\nu_{xy}$  et  $\nu_{yx}$  les deux coefficients de Poisson dans le plan<sup>1</sup> et  $G_{xy}$  le module de cisaillement dans le plan. De plus, les propriétés de symétrie de la plaque orthotrope entraînent l'égalité  $\nu_{xy} E_y = \nu_{yx} E_x$ . Ainsi, seules quatre constantes élastiques sont indépendantes dans le cas d'une plaque mince orthotrope en flexion :  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $G_{xy}$  et  $\nu_{xy}$ .

**Relations moments–courbures** – Les moments de flexion par unité de longueur dans la plaque sont obtenus par intégration des contraintes sur l'épaisseur  $h$  supposée constante, ce qui donne :

$$\begin{cases} \mathcal{M}_x(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xx}(x, y, z) dz \\ \mathcal{M}_y(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{yy}(x, y, z) dz \\ \mathcal{M}_{xy}(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xy}(x, y, z) dz \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

En introduisant l'équation A.3 dans A.4, on fait disparaître la variable  $z$  et on en déduit la relation entre moments et courbures, écrite sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_x \\ \mathcal{M}_y \\ \mathcal{M}_{xy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} D_1 & D_2/2 & 0 \\ D_2/2 & D_3 & 0 \\ 0 & 0 & D_4/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

où les constantes de rigidité  $D_i$  ( $i = 1 \dots 4$ ) sont les suivantes :

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})} \quad ; \quad D_2 = \frac{\nu_{yx} E_x h^3}{6(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})} = \frac{\nu_{xy} E_y h^3}{6(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})} \\ D_3 &= \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})} \quad ; \quad D_4 = \frac{G_{xy} h^3}{3} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

---

<sup>1</sup>Le coefficient de Poisson  $\nu_{xy}$  donne une mesure des contractions selon l'axe  $y$  sous l'effet d'une traction selon l'axe  $x$ , et inversement pour  $\nu_{yx}$  (mesure des contractions selon  $x$  sous l'effet d'une traction selon  $y$ ). Lorsque l'axe  $x$  correspond à l'axe d'orthotropie principal, c'est à dire  $E_x > E_y$ , il est courant d'appeler  $\nu_{xy}$  le coefficient de Poisson principal et  $\nu_{yx}$  le coefficient de Poisson secondaire.

**Principe de Hamilton** – L'énergie cinétique  $\mathcal{T}$  de la plaque s'écrit :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV = \frac{1}{2} \int_S \rho h \left( \dot{w}^2 + \frac{h^2}{12} (\dot{\phi}_x^2 + \dot{\phi}_y^2) \right) dS \quad (\text{A.7})$$

où  $\rho$  est la masse volumique de la plaque,  $V$  le volume,  $S$  la surface, et où le symbole  $(\dot{\phantom{x}})$  correspond à la dérivée partielle par rapport au temps. Le premier terme de  $\mathcal{T}$  représente l'énergie cinétique de translation de la plaque, les deux suivants représentent celle de rotation. Dans le cadre des hypothèses de Love-Kirchhoff on néglige l'inertie de rotation et on obtient l'expression approchée :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_S \rho h \dot{w}^2 dS \quad (\text{A.8})$$

La variation d'énergie cinétique consécutive à un déplacement virtuel  $\delta w$  s'écrit alors :

$$\delta \mathcal{T} = - \int_S \rho h \ddot{w} \delta w dS \quad (\text{A.9})$$

L'énergie potentielle élastique  $\mathcal{U}_{\text{int}}$  (ou énergie potentielle de déformation), quant à elle, est donnée par :

$$\mathcal{U}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_V \bar{\sigma} : \bar{\epsilon} dV \quad (\text{A.10})$$

La variation d'énergie potentielle s'écrit alors [31], avec le champ de déformations A.2, la loi constitutive A.3 et après intégration sur  $[-\frac{h}{2}; \frac{h}{2}]$  :

$$\delta \mathcal{U}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_S \left[ \mathcal{M}_x \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \mathcal{M}_y \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2 \mathcal{M}_{xy} \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] dS \quad (\text{A.11})$$

Enfin, le travail virtuel  $\delta \mathcal{U}_{\text{ext}}$  d'une densité surfacique de force transversale  $f(x, y, t)$  s'écrit :

$$\delta \mathcal{U}_{\text{ext}} = \int_S f(x, y, t) \delta w dS \quad (\text{A.12})$$

Après rassemblement des termes A.9, A.11 et A.12, l'application du principe de Hamilton  $\int_{t_1}^{t_2} (\delta \mathcal{T} - \delta \mathcal{U}_{\text{int}} + \delta \mathcal{U}_{\text{ext}}) dt = 0$  donne finalement l'équation du mouvement de flexion de la plaque en terme de moments :

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{M}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{M}_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{M}_{xy}}{\partial x \partial y} + f(x, y, t) \quad (\text{A.13})$$

À partir des relations A.5 et A.13 et en faisant l'hypothèse de propriétés matérielles uniformes (plaque homogène), on retrouve l'équation classique des plaques minces orthotropes vérifiée par le

déplacement transversal  $w(x, y, t)$  :

$$\boxed{\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + (D_2 + D_4) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = f(x, y, t)} \quad (\text{A.14})$$

**Relation de dispersion** – L'équation de dispersion s'obtient en supposant une solution de type onde plane de la forme :

$$w(x, y, t) = w_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = w_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)} \quad (\text{A.15})$$

où  $w_0$  est l'amplitude complexe,  $\omega$  est la pulsation en  $[\text{rad s}^{-1}]$  et  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$  est le nombre d'onde en  $[\text{rad m}^{-1}]$  avec  $k_x$  et  $k_y$  les composantes du nombre d'onde, respectivement, dans les directions  $x$  et  $y$ . Après avoir injecté cette solution dans l'équation A.14 pour une charge extérieure  $f$  nulle, on obtient la relation de dispersion d'une plaque mince orthotrope, écrite en coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{D_1 k_x^4 + D_3 k_y^4 + (D_2 + D_4) k_x^2 k_y^2 = \rho h \omega^2} \quad (\text{A.16})$$

et en coordonnées polaires :

$$k^4(\theta) \left( D_1 \cos^4(\theta) + D_3 \sin^4(\theta) + (D_2 + D_4) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \right) = \rho h \omega^2 \quad (\text{A.17})$$

La relation de dispersion A.16 peut se simplifier pour un type d'orthotropie spécifique appelée *orthotropie elliptique*. Cela revient à faire une hypothèse quant à la valeur du module de cisaillement qui s'écrit, pour une plaque orthotrope elliptique<sup>2</sup> [13] :

$$G_{xy} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{E_x E_y} - \nu_{yx} E_x}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}} \quad (\text{A.18})$$

Les constantes de rigidité sont alors liées entre elles par la relation  $D_2 + D_4 = 2\sqrt{D_1 D_3}$  et l'équation A.16 se factorise en :

$$\left( k_x^2 \sqrt{D_1} + k_y^2 \sqrt{D_3} \right)^2 = \rho h \omega^2 \quad (\text{A.19})$$

Lorsque la relation particulière  $D_2 + D_4 = 2\sqrt{D_1 D_3}$  n'est pas vérifiée, c'est à dire pour la plupart des matériaux orthotropes, nous qualifierons l'orthotropie de *quelconque* ou *non elliptique*.

**Cas particulier de la plaque isotrope** – Dans le cas particulier d'un matériau isotrope tout plan est plan de symétrie. Seules deux constantes élastiques sont indépendantes pour une plaque isotrope : le module d'Young  $E = E_x = E_y$  et le coefficient de Poisson  $\nu = \nu_{xy} = \nu_{yx}$  (le module de cisaillement étant alors lié à  $E$  et  $\nu$  par  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ). En posant  $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$  le coefficient de rigidité de la plaque, on a les correspondances suivantes avec les constantes de rigidités définies

---

<sup>2</sup>Cette dénomination est retenue pour ce type d'orthotropie car le profil des pulsations constantes représenté dans le  $k$ -espace (voir la figure 3.3) est ellipsoïdal dans ce cas.

précédemment (équation A.6) :

$$\begin{aligned} D_1 = D_3 &= \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} = D \\ D_2 = 2D_1 - D_4 &= \frac{\nu E h^3}{6(1 - \nu^2)} = 2\nu D \\ D_4 &= \frac{E h^3}{6(1 + \nu)} = 2(1 - \nu) D \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

L'équation A.14 devient alors, pour une plaque mince isotrope homogène :

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = f(x, y, t) \quad (\text{A.21})$$

soit encore, en termes de l'opérateur bilaplacien  $\nabla^4$ , l'expression plus compacte :

$$\boxed{\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \nabla^4 w = f \quad \text{où : } D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}} \quad (\text{A.22})$$

La relation de dispersion s'écrit alors, dans le cas isotrope (et pour  $f = 0$ ) :

$$\boxed{D k^4 = \rho h \omega^2} \quad (\text{A.23})$$

Pour une plaque isotrope et sous les hypothèses de Love-Kirchhoff, la vitesse de phase (notée  $c_{\varphi_{\text{LK}}}$ ) est donnée par  $\omega/k$  et la vitesse de groupe (notée  $c_{\text{gr}_{\text{LK}}}$ ) par  $\partial\omega/\partial k$ . Ainsi on a :

$$c_{\varphi_{\text{LK}}} = \sqrt{\omega} \left( \frac{D}{\rho h} \right)^{1/4} \quad (\text{A.24})$$

et

$$c_{\text{gr}_{\text{LK}}} = 2k \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = 2\sqrt{\omega} \left( \frac{D}{\rho h} \right)^{1/4} = 2c_{\varphi} \quad (\text{A.25})$$

## 2 Plaque épaisse – Modèle de Reissner-Mindlin

L'équation des plaques minces établie ci-dessus conduit à des vitesses de propagation qui tendent vers l'infini avec la fréquence. Un modèle plus réaliste en hautes fréquences est le modèle de Reissner-Mindlin [91] pour les plaques épaisses<sup>3</sup>. Deux hypothèses du modèle de Love-Kirchhoff sont abandonnées :

1. Les sections droites, perpendiculaires à la fibre neutre au repos, ne restent pas normales à celle-ci au cours du mouvement (voir la figure A.2)<sup>4</sup>.

<sup>3</sup>Ce modèle généralise au cas des plaques le modèle de Timoshenko qui régit les vibrations transversales des poutres avec déformation à l'effort tranchant.

<sup>4</sup>On considère malgré tout, dans la théorie de Mindlin, que les points du segment initialement perpendiculaire à la

2. L'inertie de rotation n'est pas négligée.

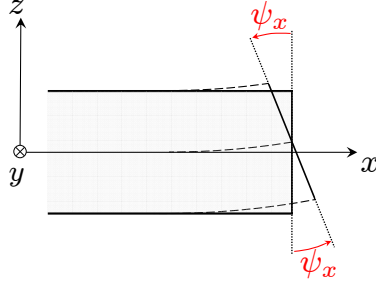


FIG. A.2 – Rotation des sections droites dans la théorie des plaques de Reissner-Mindlin : les déformations en cisaillement des sections ne sont pas négligées.

Nous ne détaillerons pas ici l'établissement de l'équation de flexion des plaques épaisses dans la théorie de Reissner-Mindlin ; nous invitons le lecteur à se reporter par exemple à [75] ou [13] pour le calcul complet. Ainsi, d'après [75] le mouvement d'une plaque épaisse orthotrope libre ( $f(x, y, t) = 0$ ) s'écrit comme un système de trois équations à trois inconnues (le déplacement transversal  $w$  et les rotations des sections droites  $\psi_x$  et  $\psi_y$ , voir la figure A.2) :

$$\begin{cases} D_1 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{D_4}{4} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \left( \frac{D_2}{2} + \frac{D_4}{4} \right) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} - \kappa^2 G_{xz} h \left( \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \\ D_3 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \frac{D_4}{4} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \left( \frac{D_2}{2} + \frac{D_4}{4} \right) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} - \kappa^2 G_{yz} h \left( \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} \\ \kappa^2 G_{xz} h \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \kappa^2 G_{yz} h \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

où  $\kappa = \frac{\pi}{\sqrt{12}} \approx 0.9069$  est un paramètre correctif (sur le cisaillement) de Timoshenko et où  $G_{xz}$  et  $G_{yz}$  sont, respectivement, les modules de cisaillement dans les plan  $(O_x, O_z)$  et  $(O_y, O_z)$ .

**Relation de dispersion** – La relation de dispersion du modèle de Reissner-Mindlin s'écrit pour une onde plane se propageant selon l'axe  $O_x$ <sup>5</sup>, d'après [75] :

$$\frac{\rho^2}{G_{xz}^2} \omega^4 \left( 1 - \frac{12\kappa^2 G_{xz}}{\omega^2 h^2} \frac{1}{\rho} \right) - \frac{\rho}{G_{xz}} k^2 \omega^2 \left( \frac{12 D_1}{G_{xz} h^3} + \kappa^2 \right) + k^4 \kappa^2 \frac{12 D_1}{G_{xz} h^3} = 0 \quad (\text{A.27})$$

En termes de vitesse de phase  $c_{\text{RM}} = \omega/k$  du modèle de Reissner-Mindlin, la relation de dispersion A.27 devient :

$$\left( \frac{c_{\text{RM}}}{c_{\text{sx}}} \right)^4 \left( 1 - \frac{12\kappa^2 c_{\text{sx}}}{\omega^2 h^2} \right) - \left( \frac{c_{\text{RM}}}{c_{\text{sx}}} \right)^2 (a^2 + \kappa^2) + \kappa^2 a^2 = 0 \quad (\text{A.28})$$

fibres neutres restent alignés, en introduisant l'effet du cisaillement sous la forme d'une contribution dans l'expression des angles de déformation  $\psi_x$  et  $\psi_y$  [75]

<sup>5</sup>On obtient de manière similaire les relations A.27–A.33 pour une onde plane se propageant suivant l'axe  $O_y$  en remplaçant le coefficient de rigidité  $D_1$  par  $D_3$ , le module d'Young  $E_x$  par  $E_y$  et le module de cisaillement  $G_{xz}$  par  $G_{yz}$ .

où  $a = \sqrt{\frac{12 D_1}{h^3 G_{xz}}} = \frac{c_{p_x}}{c_{s_x}}$  avec  $c_{p_x} = \sqrt{\frac{12 D_1}{\rho h^3}} = \sqrt{\frac{E_x}{\rho(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})}}$  la célérité des ondes de compression (ou célérité des ondes longitudinales) se propageant suivant l'axe  $O_x$ , et  $c_{s_x} = \sqrt{\frac{G_{xz}}{\rho}}$  la célérité des ondes de cisaillement pure dans le plan  $(O_x, O_z)$ .

L'équation A.27 est d'ordre 2 en  $k^2$  et admet donc deux solutions qui correspondent à deux types d'ondes. La première est une onde évanescence *faisant tourner les sections sans modifier la hauteur de la fibre neutre* [13]. La seconde solution est une onde de flexion dont l'équation de dispersion est [75] :

$$k^2 = \frac{\frac{\omega^2}{c_{p_x}} \left(1 + \frac{a^2}{\kappa^2}\right) + \sqrt{\frac{1}{c_{p_x}^2} \left(\frac{a^2}{\kappa^2} - 1\right) \omega^4 + \frac{48 \omega^2}{h^2}}}{2 c_{p_x}} \quad (\text{A.29})$$

et la vitesse de phase s'écrit alors :

$$c_{\varphi_{\text{RM}}} = \left( \frac{2 c_{p_x}}{\frac{1}{c_{p_x}} \left(1 + \frac{a^2}{\kappa^2}\right) + \sqrt{\frac{1}{c_{p_x}^2} \left(\frac{a^2}{\kappa^2} - 1\right) + \frac{48}{h^2 \omega^2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.30})$$

**Comportement asymptotique :** On observe tout d'abord que la vitesse de phase ne tend plus vers l'infini avec la fréquence (contrairement au précédent modèle de Love-Kirchhoff). La valeur limite dépend du signe de  $A = a^2 - \kappa^2$ . Lorsque  $A > 0$ , on a :

$$c_{\varphi_{\text{RM}}} \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} \kappa c_{s_x} \quad (\text{A.31})$$

et le comportement asymptotique est :

$$\kappa^2 G_{xz} k^2 \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} \rho \omega^2 \quad (\text{A.32})$$

L'onde de flexion se transforme donc en onde de cisaillement dans les hautes fréquences (au facteur correctif  $\kappa^2$  près). Ce cas est le plus courant. Pour les matériaux isotrope en particulier, on a toujours  $A > 0$  car  $a^2 = \frac{E}{(1-\nu^2)G} = \frac{2(1+\nu)}{(1-\nu)(1+\nu)} \geq 1 > \kappa^2$  (le coefficient de Poisson étant compris entre -1 et 1/2).

Concernant les matériaux orthotropes, il est envisageable d'obtenir  $A < 0$  lorsque le matériau vérifie  $\frac{E_x}{(1-\nu_{xy} \nu_{yx})} < \kappa G_{xz}$  c'est à dire  $c_{p_x} < \kappa c_{s_x}$ . Selon Lambourg [75], ce cas peut survenir lorsque

l'influence de l'inertie de rotation devient prépondérante par rapport à celle du cisaillement<sup>6</sup>. La vitesse de phase tend alors cette fois vers la célérité des ondes de compressions :  $c_{\varphi_{\text{RM}}} \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} c_{\text{Px}}$ .

Enfin, en basses fréquences le modèle de Reissner-Mindlin équivaut au modèle de Love-Kirchhoff :

$$c_{\varphi_{\text{RM}}} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \sqrt{c_{\text{Px}} \frac{\omega h}{\sqrt{12}}} = c_{\varphi_{\text{KL}}} \quad (\text{A.33})$$

et on retrouve bien l'équation de dispersion des plaque minces :

$$D_1 k^4 \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} \rho h \omega^2 \quad (\text{A.34})$$

### 3 Comparaison des deux modèles

Le domaine de validité des hypothèses de plaque mince peut être déterminé en comparant la vitesse de phase du modèle de Love-Kirchhoff  $c_{\varphi_{\text{LK}}}$  à celle du modèle de Reissner-Mindlin  $c_{\varphi_{\text{RM}}}$ .

Considérons, par exemple, le cas concret d'une table d'harmonie de piano sans les raidisseurs et les chevalets<sup>7</sup>. C'est donc une plaque – plane en première approximation – de 8 mm d'épaisseur en épicéa de lutherie (*Picea sitchensis*) taillée dans le plan LR (longitudinal-radial). Prenons comme constantes élastiques, les paramètres mesurés par Berthaut [13] pour l'épicéa de Sitka :  $E_x = 11.5$  GPa,  $E_y = 0.47$  GPa,  $\nu_{xy} = 0.005$  et  $\rho = 392$  kg m<sup>-3</sup> (où l'axe  $O_x$  correspond à la direction longitudinale et l'axe  $O_y$  à la direction radiale). Les modules de cisaillement transverses  $G_{xz}$  (respectivement  $G_{yz}$ ) non mesuré par Berthaut sont choisis égaux à 0.99 GPa (respectivement 0.072 GPa) d'après les mesures de Haines [58] sur la même essence d'épicéa. Les vitesses de phase obtenues avec les deux modèles pour chacune des deux directions de propagation sont présentées Fig. A.3 et Fig. A.4 ainsi que l'évolution avec la fréquence de l'erreur relative entre ces deux vitesses. Les relations de dispersion des deux modèles sont également présentées à la figure A.5 pour des ondes de se propageant suivant  $O_y$ .

On observe que l'influence du cisaillement transverse est très forte dans la direction radiale de la plaque. D'après Lambourg [75], *ceci est dû aux effets cumulés des faibles valeurs du module d'Young  $E_y$  et du rapport  $G_{yz}/E_y$* . Ainsi, à  $f \approx 4200$  Hz (correspondant à la fréquence fondamentale de la corde la plus aiguë du piano – **Do7**), l'approximation *plaque mince* conduit à une erreur de l'ordre de 11% sur la vitesse de phase des ondes de flexion se propageant suivant  $O_y$ , ce qui est relativement important (moins de 5% suivant  $O_x$ ). Dès lors, un modèle basé sur les hypothèses de Love-Kirchhoff ne peut être réaliste dans le haut registre du piano.

Néanmoins, il faut garder à l'esprit que dans cette étude nous avons ignoré l'influence des raidisseurs et des deux chevalets. Ceux-ci raidissent très fortement l'axe  $y$ , allant même jusqu'à

---

<sup>6</sup>Lambourg précise ainsi que certaines plaques d'épicéa taillées suivant le plan RT (radial-tangentiel) peuvent conduire à  $A < 0$ . En pratique, et dans les cas rencontrés en lutherie, les plaques sont taillées suivant le plan LR (longitudinal-radial) et on a toujours  $A > 0$ .

<sup>7</sup>Ce paragraphe est fortement inspiré d'une étude similaire menée par Lambourg [75] sur la table d'harmonie de guitare.



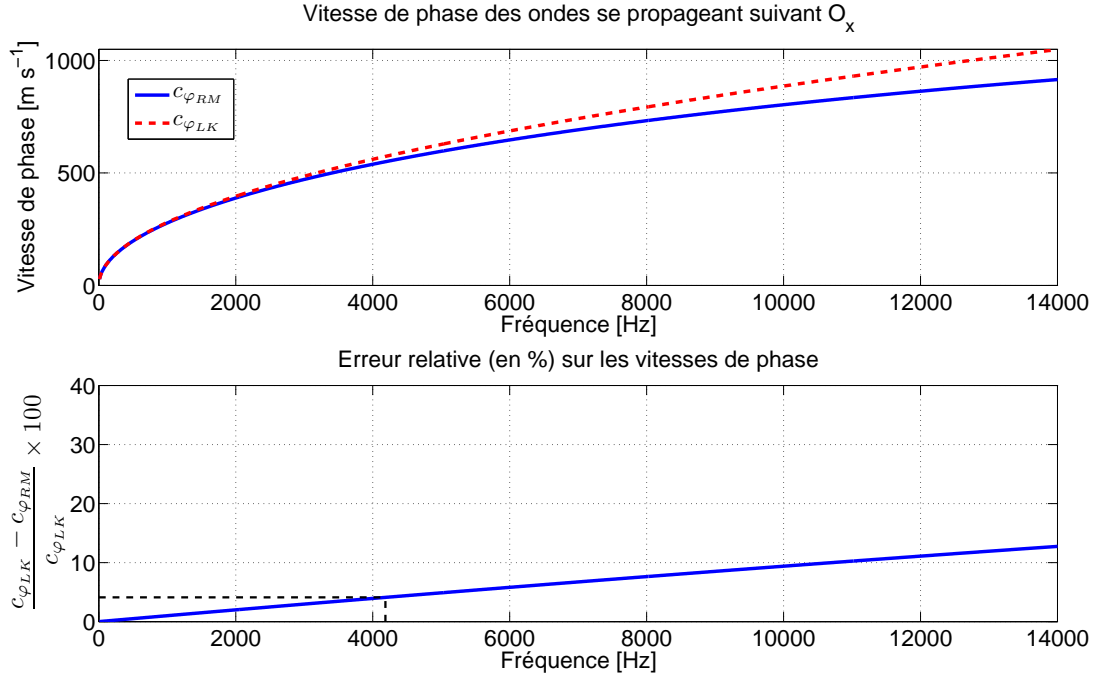


FIG. A.3 – Influence du cisaillement et de l’inertie de rotation pour des ondes de flexion se propageant dans la direction longitudinale d’une plaque en épicea de 8 mm taillée dans le plan LR. À 4200 Hz, l’erreur sur la vitesse de phase est d’environ 4%.

*surcompenser* l’anisotropie dans certains cas. Cette rigidification réduit donc sûrement l’influence du cisaillement et augmenterait ainsi le domaine de validité du modèle plaque mince.

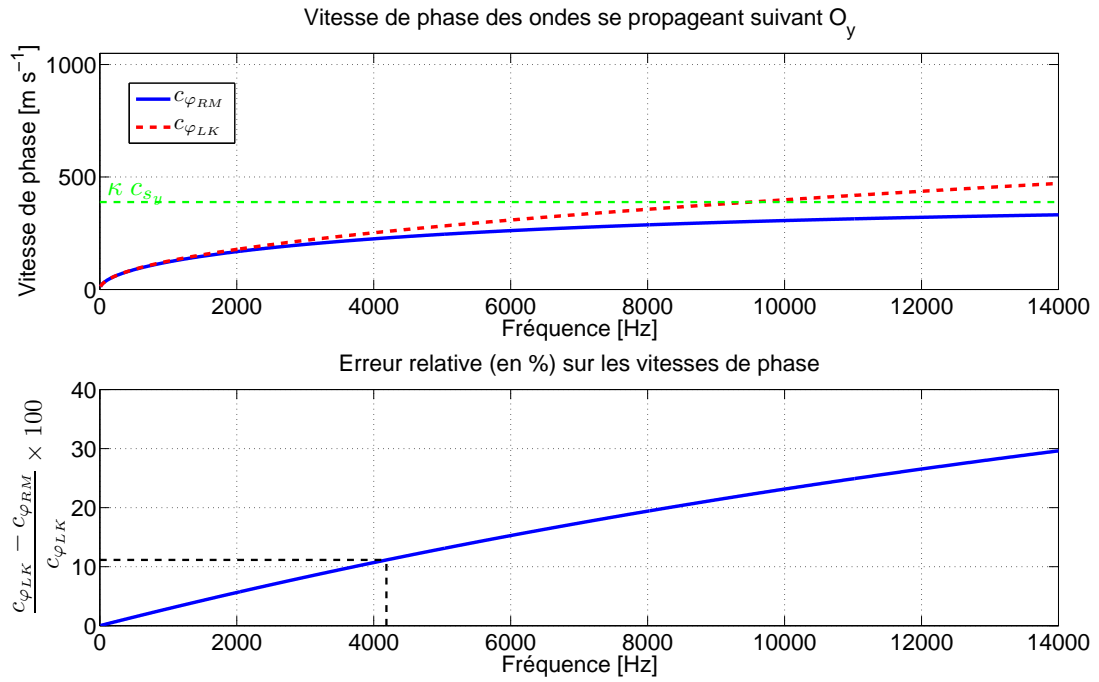


FIG. A.4 – Influence du cisaillement et de l’inertie de rotation dans la direction radiale (mêmes échelles que pour la figure A.3). L’asymptote en hautes fréquences de  $c_{\varphi_{RM}}$  est rajoutée en vert. À 4200  $\text{Hz}$ , l’erreur sur la vitesse de phase est d’environ 11%.

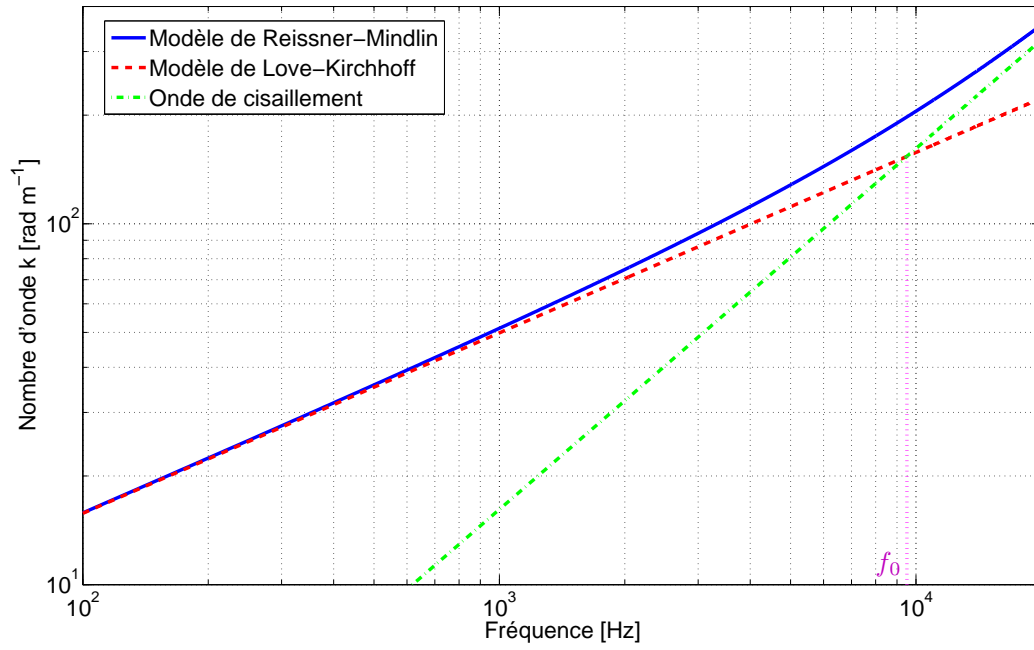


FIG. A.5 – Comparaison des relations de dispersion des ondes de flexion se propageant suivant  $O_y$  pour le modèle plaque mince et le modèle plaque épaisse. Avec la fréquence, l'onde de flexion du modèle de Reissner-Mindlin (—) s'écarte de l'asymptote basses fréquences (Love-Kirchhoff : - -) et tend vers une onde de cisaillement (— · —) en hautes fréquences. Le modèle de Love-Kirchhoff et l'onde de cisaillement se croisent à la fréquence  $f_0 = \frac{\kappa^2 G_{yz}}{2\pi h} \sqrt{\frac{12(1-\nu_{xy}\nu_{yx})}{\rho E_y}}$ .

## Annexe B

# Formalisme modal

Cette section est fortement inspirée des ouvrages de Chaigne et Kergomard [31] et de Gérardin et Rixen [57].

### 1 Système conservatif

Considérons un système conservatif discret. Il possède un nombre fini de degrés de liberté. Les équations du mouvement d'un tel système s'écrivent en dynamique linéaire, sous la forme générale (*équation des petites oscillations libres*) :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = 0 \quad (\text{B.1})$$

où  $\mathbf{M}$  est la *matrice de masse linéaire* du système et  $\mathbf{K}$  est la *matrice de raideur linéaire* du système. Ces deux matrices sont symétriques et définies positives [57]. Le vecteur  $\mathbf{x}$  est formé de l'ensemble des paramètres décrivant le mouvement du système ; chacune de ses composantes est une fonction du temps [31].

Un mouvement propre du système (harmonique en temps) est par définition solution de l'équation :

$$\left( \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} \right) \mathbf{x} = 0 \quad (\text{B.2})$$

Ce système de  $n$  équations linéaires et homogènes admet une solution  $\Phi_n$  non nulle pour le mouvement telle que  $(\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}) \Phi_n = 0$  si  $\omega_n$  est racine du polynôme caractéristique :

$$\det \left( \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} \right) = 0 \quad (\text{B.3})$$

C'est l'équation aux valeurs propres. Les racines  $\omega_n$  sont en nombre finis et sont réelles pour un système conservatif [31]. Le couple  $(\omega_n, \Phi_n)$  est appelé mode propre du système.  $\omega_n$  a la signification d'une *pulsation* associée au mode  $n$  (elle est mesurée en  $\text{rad s}^{-1}$ ), et le vecteur propre correspondant  $\Phi_n$  est appelé *déformée propre* ou encore *déformée modale*.

Mathématiquement, les déformées propres  $\{\Phi_n\}$  forment une base de co-diagonalisation des matrices de masse et de raideur [13]. Ainsi on a les propriétés d'orthogonalité suivantes :

$$\begin{cases} \langle \Phi_m, \mathbf{M}\Phi_n \rangle = m_n \delta_{nm} \\ \langle \Phi_m, \mathbf{K}\Phi_n \rangle = k_n \delta_{nm} \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

où le symbole  $\langle, \rangle$  correspond au produit scalaire<sup>1</sup> et où  $\delta$  est le symbole de Kronecker :

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

L'équation B.4 signifie que pour  $n \neq m$  : *le travail virtuel des forces d'inertie et des forces élastiques du mode  $n$  est nul lors d'un déplacement selon le mode  $m$* , d'après Gérardin et Rixen [57]. Il y a *indépendance mécanique des modes entre eux* [31]. La quantité  $m_n = \langle \Phi_n, \mathbf{M}\Phi_n \rangle$  est appelée *masse modale* (ou *masse généralisée*) et  $k_n = \langle \Phi_n, \mathbf{K}\Phi_n \rangle$  *raideur modale* (ou *raideur généralisée*) du mode  $n$ . Ces grandeurs mesurent la contribution du mode  $n$  respectivement à l'énergie cinétique et à l'énergie de déformation du système [57]. Elles sont liées entre elles par la relation suivante :

$$\frac{k_n}{m_n} = \omega_n^2 \quad (\text{B.6})$$

Il est important de garder à l'esprit que la masse modale et la raideur modale ne sont connus qu'à un facteur près étant donnée l'indétermination sur l'amplitude de la déformée modale [57]. Deux choix sont usuellement retenus :

1. Un choix judicieux est de fixer à l'unité la plus grande composante des vecteurs propres<sup>2</sup>, ce qui permet alors de comparer les masses modales à la masse physique de la structure.
2. Un second choix est de normaliser les vecteurs propres par rapport à la matrice de masse. Cela revient à fixer à l'unité la masse généralisée du mode. Les relations d'orthogonalité B.4 se simplifient alors dans ce cas en :

$$\begin{cases} \langle \Phi_m, \mathbf{M}\Phi_n \rangle = \delta_{nm} \\ \langle \Phi_m, \mathbf{K}\Phi_n \rangle = \omega_n^2 \delta_{nm} \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Une fois déterminés les modes propres du système, on peut décomposer tout mouvement sur la base modale :

$$\mathbf{x} = \sum_n \Phi_n q_n(t) \quad (\text{B.8})$$

où les  $q_n(t)$  sont les *coordonnées modales* appelées encore *déplacements modaux généralisés* ou *facteurs de participation modaux*. En insérant cette expression dans l'équation B.1 et lorsque le

<sup>1</sup>On a l'égalité des notations  $\langle \Phi_m, \mathbf{M}\Phi_n \rangle = \Phi_m^T \mathbf{M}\Phi_n$  où  $\Phi_m^T$  correspond au transposé du vecteur  $\Phi_m$ .

<sup>2</sup>Cela revient à fixer à l'unité l'amplitude des déformées modales.

système est soumis à un champ de force notée  $\mathbf{F}$ , on a :

$$\sum_n \ddot{q}_n \mathbf{M} \Phi_n + \sum_n q_n \mathbf{K} \Phi_n = \mathbf{F} \quad (\text{B.9})$$

La projection de cette équation sur la déformée modale  $\Phi_m$  s'écrit :

$$\sum_n \ddot{q}_n \langle \Phi_m, \mathbf{M} \Phi_n \rangle + \sum_n q_n \langle \Phi_m, \mathbf{K} \Phi_n \rangle = \langle \Phi_m, \mathbf{F} \rangle \quad (\text{B.10})$$

et grâce aux propriétés d'orthogonalité B.4, l'équation B.10 devient un système de  $n$  oscillateurs à un degré de liberté découplés :

$$\boxed{\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{f_n}{m_n}} \quad (\text{B.11})$$

où la *force généralisée*

$$f_n = \langle \Phi_n, \mathbf{F} \rangle \quad (\text{B.12})$$

représente la projection des efforts extérieurs sur le mode  $n$ .

## 2 Système dissipatif

Examinons maintenant les conséquences de l'introduction d'un mécanisme d'amortissement sur la base  $\{\Phi_n\}$  des modes propres du système conservatif associé. Supposons que le mécanisme d'amortissement puisse être représenté par une fonction de dissipation de type visqueux, quadratique dans les vitesses généralisées [57]. L'énergie  $\mathcal{D}$  dissipée par le système est telle que :

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} \geq 0 \quad (\text{B.13})$$

où  $\mathbf{C}$  est la matrice d'amortissement symétrique et non négative. Les équations du mouvement du système dissipatif en présence d'un champ de force  $\mathbf{F}$  s'écrivent maintenant sous la forme :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (\text{B.14})$$

Comme dans le cas non amorti, on développe  $\mathbf{x}$  sur la base des fréquences et déformées propres du système conservatif associé  $\mathbf{x} = \sum_m \Phi_m q_m(t)$ . Après projection sur la déformée modale  $\Phi_n$  et grâce aux propriétés d'orthogonalité des modes par rapport aux matrices de masse et de raideur, on trouve que les déplacements modaux généralisés  $q_n$  sont à présent solutions de :

$$\ddot{q}_n + 2\xi_{nn}\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{f_n}{m_n} - 2\omega_n \sum_{m \neq n} \xi_{nm} \dot{q}_m \quad (\text{B.15})$$

où les  $\xi_{nm}$  sont les *coefficients d'amortissement*<sup>3</sup> (sans dimension) définis par :

$$\langle \Phi_n, \mathbf{C}\Phi_m \rangle = 2\xi_{nm}m_n\omega_n \quad (\text{B.16})$$

Le coefficient  $\xi_{nn}$  (noté simplement  $\xi_n$ ) est le *coefficient d'amortissement modal* pour le mode  $n$ . Nous réserverons la dénomination *coefficient d'amortissement intermodal* pour  $\xi_{mn}$  lorsque  $m \neq n$ . En général, la matrice  $\mathbf{C}$  n'est pas diagonalisable ; les équations restent couplées par les coefficients d'amortissement intermodaux.

**Hypothèse d'amortissement diagonal** – Le système d'équations B.16 peut être considérablement simplifié si le couplage par amortissement était nul ; en d'autres termes si la matrice des  $[\xi_{mn}]$  était diagonale.

C'est le cas des systèmes dits *faiblement dissipatifs* [31]. La démonstration complète peut être trouvée dans [57] ou [31]. Lorsque l'amortissement est faible et que les pulsations propres du système conservatif associé sont bien distinctes, l'influence des coefficients d'amortissement intermodaux sur le contenu spectral du système peut être négligé, d'après Gérardin et Rixen [57]. Les déformées propres restent donc inchangées par rapport au cas conservatif. Cette hypothèse de faible amortissement est connue sous le nom d'hypothèse de Basile. Elle s'écrit :

$$\langle \Phi_n, \mathbf{C}\Phi_m \rangle = 2\xi_{nm}m_n\omega_n\delta_{nm} \quad (\text{B.17})$$

Les équations des déplacements généralisés sont alors découplés et s'écrivent :

$$\boxed{\ddot{q}_n + 2\xi_n\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{f_n}{m_n}} \quad (\text{B.18})$$

Nous rappelons les expressions des différents paramètres d'amortissement (tous décrivant l'amortissement de manière identique) – facteur de pertes  $\eta$ , décrement logarithmique  $\lambda$ , angle de perte  $\delta$  (à ne pas confondre avec le symbole de Kronecker) et facteur d'amortissement (ou amortissement temporel)  $\alpha$  en  $[\text{s}^{-1}]$  – en fonction du coefficient d'amortissement réduit  $\xi$  :

$$\eta = 2\xi \quad ; \quad \lambda = 2\pi\xi \quad ; \quad \delta = \arctan(2\xi) \quad ; \quad \alpha = \xi\omega \quad (\text{B.19})$$

---

<sup>3</sup>Le coefficient  $\xi$  est souvent appelé *coefficient d'amortissement réduit* ou simplement *taux d'amortissement*.



## Annexe C

# Effet de la précontrainte sur les modes propres et la densité modale

Lorsqu'une plaque est précontrainte sous l'effet conjugué d'une tension  $T_x$  et d'une tension  $T_y$  appliquées dans le plan de la plaque et selon les directions respectives  $x$  et  $y$ , l'équation des plaques mince orthotropes spéciales A.14 vérifiée par le déplacement transversal  $w(x, y, t)$  est modifiée de la manière suivante (d'après Gérardin et Rixen [57] et Busch-Vishniac [26]) :

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + (D_2 + D_4) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{C.1})$$

L'équation de dispersion s'écrit alors :

$$D_1 k_x^4 + D_3 k_y^4 + (D_2 + D_4) k_x^2 k_y^2 + T_x k_x^2 + T_y k_y^2 = \rho h \omega^2 \quad (\text{C.2})$$

et les pulsations propres  $\omega_{mn_T}$  de la plaque précontrainte en appui simple sur ses bords deviennent :

$$\omega_{mn_T} = \frac{1}{\sqrt{\rho h}} \sqrt{D_1 \frac{m^4 \pi^4}{L_x^4} + D_3 \frac{n^4 \pi^4}{L_y^4} + (D_2 + D_4) \frac{m^2 \pi^2}{L_x^2} \frac{n^2 \pi^2}{L_y^2} + T_x \frac{m^2 \pi^2}{L_x^2} + T_y \frac{n^2 \pi^2}{L_y^2}} \quad (\text{C.3})$$

ce qui peut se réécrire sous la forme :

$$\omega_{mn_T}^2 = \omega_{mn}^2 + \frac{\pi^2}{\rho h} \left( T_x \frac{m^2}{L_x^2} + T_y \frac{n^2}{L_y^2} \right) \quad (\text{C.4})$$

où les  $\omega_{mn}$  sont les pulsations propres de la plaque non précontrainte (équation 3.5). On observe dans l'équation précédente que si  $T_x$  et  $T_y$  sont positifs – ce qui correspond à une traction selon les deux axes – les fréquences propres augmentent par rapport au cas non précontraint. Si les tensions sont négatives – cas d'une compression – les fréquences propres diminuent. Dans ce second cas, plus l'amplitude des forces de compression augmente plus la raideur globale de la structure diminue [31] et les fréquences de résonances tendent vers 0. Par exemple, si l'on suppose que la compression

est uniaxiale ( $T_y = 0$ ), la pulsation propre  $\omega_{mnT}$  sera nulle pour  $T_x = -\rho h \omega_{mn}^2 \left(\frac{L_x}{m\pi}\right)^2$  appelée charge critique de flambage pour le mode  $(m, n)$ . À cette fréquence, la plaque présente alors une raideur nulle [114].

Intéressons-nous maintenant à l'influence des termes de précontrainte sur la densité modale. Un résultat tout à fait intéressant a été établi par Wilkinson [124] dans le cas isotrope : l'effet conjugué de  $T_x$  et  $T_y$  (quel que soit leur signe respectif) fait diminuer la densité modale de la plaque par rapport au cas non précontraint. Elle s'écrit<sup>1</sup> d'après [124] (en supposant  $|T_y| \geq |T_x|$  et sans tenir compte des termes correctifs dûs aux conditions aux limites) :

$$n_T(f) = \frac{S}{\pi} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \frac{F(\pi/2, \kappa)}{(1 + \beta^2)^{\frac{1}{4}} (1 + \beta^2 \chi^2)^{\frac{1}{4}}} \quad (C.5)$$

$$\text{où } \chi = T_x/T_y, \quad \beta = \frac{T_y^2}{16\pi^2 f^2 \rho h D}, \quad \kappa^2 = \frac{\beta^2(1 - \chi)^2 - \left[(1 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} - (1 + \beta^2 \chi^2)^{\frac{1}{2}}\right]^2}{4(1 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \beta^2 \chi^2)^{\frac{1}{2}}},$$

et où  $F$  est l'intégrale elliptique complète de première espèce. Contrairement au cas non précontraint (équation 3.10), la densité modale  $n_T(f)$  dépend de la fréquence. La figure C.1 illustre l'effet de la précontrainte sur la densité modale d'une plaque isotrope pour différentes amplitudes de charge ( $T_x, T_y$ ). Les propriétés matérielles et géométriques de la plaque sont celle de la plaque en épicéa considérée dans l'annexe A et dont le module d'Young a été fixé ici à la moyenne géométrique des deux modules d'Young de la plaque orthotrope :  $E = \sqrt{E_x E_y}$ . Les conditions aux limites de la plaque sont choisies de type simplement supporté de manière à pouvoir comparer comme sur la figure 3.5, la densité modale *théorique* (équation C.5) à la densité modale *moyenne*<sup>2</sup> estimée à partir des fréquences propres analytiques. Dans la figure C.1 on a donc rajouté à l'équation C.5 le terme correctif correspondant aux conditions simplement supportées (donné à l'équation 3.25). On observe tout d'abord, qu'à une fréquence donnée, plus l'amplitude de la charge augmente plus la densité modale diminue. En outre, plus la fréquence augmente plus la contribution des termes de précontrainte sur la densité modale de la plaque diminue. En hautes fréquences on retrouve bien la densité modale asymptotique  $n_\infty$  de la plaque isotrope non précontrainte (équation 3.10) :  $\beta \xrightarrow{+\infty} 0$ ,  $F \xrightarrow{+\infty} \pi/2$  et  $n_T(f) \xrightarrow{+\infty} \frac{S}{2} \sqrt{\rho h/D}$ . Les effets des précontraintes se font donc surtout sentir sur les premiers modes de la plaque et s'atténuent au fur et à mesure que l'ordre des modes augmente [31].

L'extension aux plaques orthotropes n'est pas immédiate. Il semblerait que pour les matériaux rencontrés le comportement soit semblable au cas isotrope, c'est à dire une diminution de la densité modale par rapport au cas non précontraint quelles que soit les valeurs de  $T_x$  et  $T_y$ .

<sup>1</sup>Nous ne développerons pas ici le calcul semblable à celui présenté dans la section 1.2.2 du chapitre 3 (changement de variable et calcul de l'intégrale dans le  $k$ -espace).

<sup>2</sup>Celle-ci est calculée par moyenne glissante sur des bandes d'octaves ; avec un recouvrement fixé à un tiers de la bande.

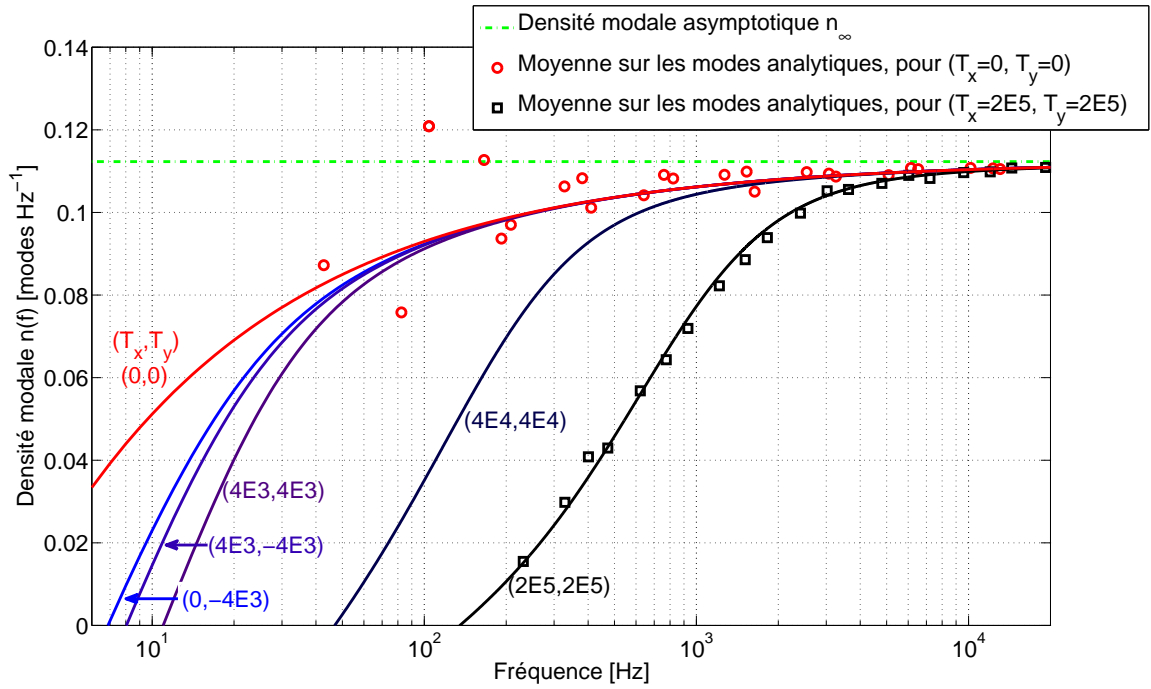


FIG. C.1 – Influence de la précontrainte sur la densité modale d’une plaque isotrope simplement supportée ( $E = 2.3$  GPa,  $\nu = 0.005$ ,  $\rho = 392$  kg m $^{-3}$ ,  $L_x = 1.39$  m,  $L_y = 0.9$  m,  $h = 8$  mm), d’après [124]. Les amplitudes des tensions  $(T_x, T_y)$  en [N] sont indiquées entre parenthèse pour chacune des courbes. Les  $\circ$  sont estimés par moyenne glissante (bande d’octave) sur les fréquences propres de la plaque simplement supportée calculées analytiquement, dans le cas non précontraint. Les  $\square$  sont estimés de manière similaire dans le cas d’une traction selon les deux axes, d’amplitude ( $T_x = 200$  kN,  $T_y = 200$  kN).



## Annexe D

# Extension au cas des coques minces sphériques

Considérons maintenant que la surface de la plaque n'est plus plane mais faiblement courbée. La coque est supposée rectangulaire orthotrope spéciale et la courbure est du type sphérique, de même rayon de courbure  $R$  suivant les deux axes d'orthotropie. Les vibrations linéaires d'une telle structure, sous les hypothèses *coque mince*, sont régies par le modèle de Donnell-Mushtari-Vlasov<sup>1</sup>. Les équations du mouvement de flexion de la coque orthotrope d'épaisseur  $h$  vérifiées par le déplacement transversal  $w(x, y, t)$  s'écrivent d'après Elishakoff [49] :

$$\begin{cases} \nabla_D^4 w + \frac{1}{R} \nabla^2 \zeta + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla_B^4 \zeta - \frac{1}{R} \nabla^2 w = 0 \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

où  $\zeta$  est une variable auxiliaire appelée *fonction de force* ou *fonction d'Airy* [114] et où les opérateurs bilaplacien  $\nabla_D^4$  et  $\nabla_B^4$  sont définis par :

$$\begin{cases} \nabla_D^4(\cdot) = D_1 \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x^4} + D_3 \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial y^4} + (D_2 + D_4) \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x^2 \partial y^2} \\ \nabla_B^4(\cdot) = B_3 \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x^4} + B_1 \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial y^4} + 2B_2 \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x^2 \partial y^2} \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

Les  $D_i$  ( $i = 1 \dots 4$ ) sont les constantes de rigidité du matériau orthotrope (données à l'équation A.6), et les coefficients  $B_i$  ( $i = 1 \dots 3$ ) sont les suivants :

$$B_1 = \frac{1}{E_x h} \quad ; \quad B_2 = \frac{1/G_{xy} - \nu_{xy}/E_x - \nu_{yx}/E_y}{2h} \quad ; \quad B_3 = \frac{1}{E_y h} \quad (\text{D.3})$$

---

<sup>1</sup>L'étude détaillée de la théorie des coques sort du cadre de cette thèse. Le lecteur pourra se reporter par exemple à l'ouvrage de Soedel [114] pour plus de précision.

On obtient alors l'expression des fréquences propres  $\omega_{mn_C}$  de la coque de dimensions  $L_x$  et  $L_y$  simplement supportée sur ses bords (en fonction des pulsations propres  $\omega_{mn}$  de la plaque plane) :

$$\omega_{mn_C}^2 = \omega_{mn}^2 + \frac{\left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\right)^2}{\rho h R^2 \left(B_3 \frac{m^4}{L_x^4} + B_1 \frac{n^4}{L_y^4} + 2B_2 \frac{m^2}{L_x^2} \frac{n^2}{L_y^2}\right)} \quad (\text{D.4})$$

et celle de sa densité modale  $n_C(f)$  (sans tenir compte des termes correctifs dûs aux conditions aux limites) [49] :

$$n_C(f) = \frac{S f \rho h}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{\rho h f^2 - \tilde{B}(\theta)/R^2}{\tilde{D}(\theta)} \right]^{-1/2} d\theta \quad (\text{D.5})$$

où l'on a posé :

$$\begin{cases} \tilde{D}(\theta) = D_1 \cos^4(\theta) + D_3 \sin^4(\theta) + (D_2 + D_4) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \\ \tilde{B}(\theta) = B_3 \cos^4(\theta) + B_1 \sin^4(\theta) + 2B_2 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \end{cases} \quad (\text{D.6})$$

On observe dans l'équation D.4 que les fréquences propres augmentent avec la courbure, c'est à dire lorsque le rayon de courbure  $R \rightarrow 0$ . À l'inverse lorsque  $R \rightarrow +\infty$ ,  $\omega_{mn_C} \rightarrow \omega_{mn}$ , la densité modale  $n_C$  ne dépend plus de la fréquence et l'on retrouve bien la densité modale asymptotique de la plaque orthotrope plane (équation 3.17).

## Annexe E

# Mécanismes dissipatifs dans les plaques

L'amortissement dans les plaques élastiques résulte de la contribution de différents phénomènes physiques parmi lesquels on peut distinguer deux catégories [75] : les pertes internes (ou frottements internes) et les pertes par couplage externe. La première catégorie regroupe les dissipations intrinsèques de type *viscoélastiques* et les dissipations *thermoélastiques*. La seconde regroupe les pertes par *rayonnement acoustique* dues au couplage de la plaque avec le fluide environnant et les pertes par *transmission mécanique* qui traduisent une dissipation d'énergie à travers les conditions aux limites de la plaque. On peut également noter que pour les matériaux vibrant à grande amplitude de déplacement, un troisième type de pertes par couplage externe est à prendre en compte : les pertes par *friction fluide*. Dans le cadre des vibrations linéaires des plaques qui est le nôtre, Caracciolo et Valette [27] ont montré que ce phénomène dissipatif pouvait être négligé.

Nous introduisons dans cette section la notion d'angle de perte qui permet en régime harmonique de décrire facilement les pertes internes pour les matériaux peu amortis. Puis dans un second temps nous présentons en détail l'amortissement par rayonnement des plaques orthotropes. Les pertes par transmission mécanique sont négligées : les conditions aux limites sont considérées comme non-dissipatives.

## 1 Pertes internes

Dans notre étude, nous sommes amenés à étudier deux matériaux en particulier. Le *bois de résonance* (*épicéa*) qui est sélectionné pour les tables d'harmonies des instruments de musique, et l'*aluminium* lors de l'étape de validation de notre méthode d'analyse modale aux moyennes fréquences, dans le chapitre 2. Pour le bois, l'origine prépondérante des pertes internes est la viscoélasticité<sup>1</sup> ; pour les matériaux métalliques c'est la thermoélasticité [32].

---

<sup>1</sup>C'est le cas pour d'autres matériaux tels que le verre ou les fibres de carbones par exemple.



### 1.1 Viscoélasticité du bois

La théorie de la viscoélasticité linéaire repose sur l'hypothèse fondamentale que le champ de contrainte à un instant donné dépend localement des valeurs antérieures du champ de déformation. Cet effet est appelé *effet mémoire* ou *fading memory* en anglais (se reporter par exemple à l'ouvrage de Christensen [33]). Une représentation *naturelle et physique* est le *modèle de relaxation* qui traduit, à l'aide d'une fonction tensorielle appelée *fonction de relaxation*, le retard de phase (dissipation d'énergie) de la contrainte sur la déformation [39].

En régime harmonique et pour les matériaux peu amortis, la relation contrainte déformation viscoélastique peut s'écrire facilement en notations complexes. Supposons la déformation imposée au système de la forme  $\epsilon(t) = \Re(\epsilon_0 e^{i\omega t})$  (solicitation en déplacement). La contrainte correspondante s'écrit :

$$\sigma(t) = \Re(\bar{E}\epsilon_0 e^{i\omega t}) = E'\epsilon_0 \cos(\omega t) - E''\epsilon_0 \sin(\omega t) \quad (\text{E.1})$$

$$\Rightarrow \sigma(t) = E'\epsilon_0 \sqrt{1 + \tan^2(\delta)} \cos(\omega t + \delta) \quad (\text{E.2})$$

où  $\bar{E} = E' + iE'' = |\bar{E}| e^{i\delta} = E'(1 + i\eta)$  est le module d'Young complexe. Dans la relation E.2, on voit que  $\sigma$  est déphasée par rapport à  $\epsilon$  ; le déphasage  $\delta$  est appelé *angle de perte viscoélastique*. Il est relié au facteur de pertes viscoélastiques  $\eta$  par :

$$\tan \delta = \frac{\Im(\bar{E})}{\Re(\bar{E})} = \frac{E''}{E'} = \eta \quad (\text{E.3})$$

Pour le matériau *épicéa*, il apparait que les facteurs de pertes viscoélastiques dépendent grandement des essences considérées (notamment de la densité de l'échantillon testé et de la proportion entre *bois d'été* et *bois de printemps*). Haines [58] a mesuré de manière systématique sur plusieurs échantillons de différentes essences d'épicéa les angles de pertes dans les deux directions principales d'orthotropie L et R en fonction de la fréquence (mesure des modes de résonances de barres découpées suivant les deux directions). Les résultats sont synthétisés à la figure E.1. Le facteur de pertes radial est en moyenne trois fois supérieur au longitudinal ( $\eta_R \approx 1.7 - 3.4\%$  et  $\eta_L \approx 0.5 - 0.8\%$  pour  $f < 4$  kHz). La grande dispersion des mesures pour  $\eta_R$  tient au fait que la disparité des échantillons en termes de largeur de cernes notamment affecte beaucoup plus les caractéristiques radiales de l'épicéa, plutôt que longitudinales. On constate clairement sur la figure E.1 un accroissement des deux angles de pertes en hautes fréquences. Les mesures effectuées par Fukada [54] sur une éprouvette d'épicéa taillée dans la direction longitudinale confirment également ceci. Selon Haines cette dépendance en fréquences varie d'une essence à l'autre, mais l'accroissement est systématique. Néanmoins, dans notre étude nous considérons en première approximation que les facteurs de pertes viscoélastiques du bois sont constants dans le domaine de fréquence étudié.

Avec le formalisme viscoélastique adopté ici, chacune des 4 constantes de rigidité  $D_i$  ( $i = 1 \dots 4$ ) d'une plaque orthotrope spéciale (équation A.6) est complexe et possède un facteur de pertes défini par  $\eta_i = D_i'' / D_i'$ . McIntyre et Woodhouse [89] ont montré que le facteur de pertes

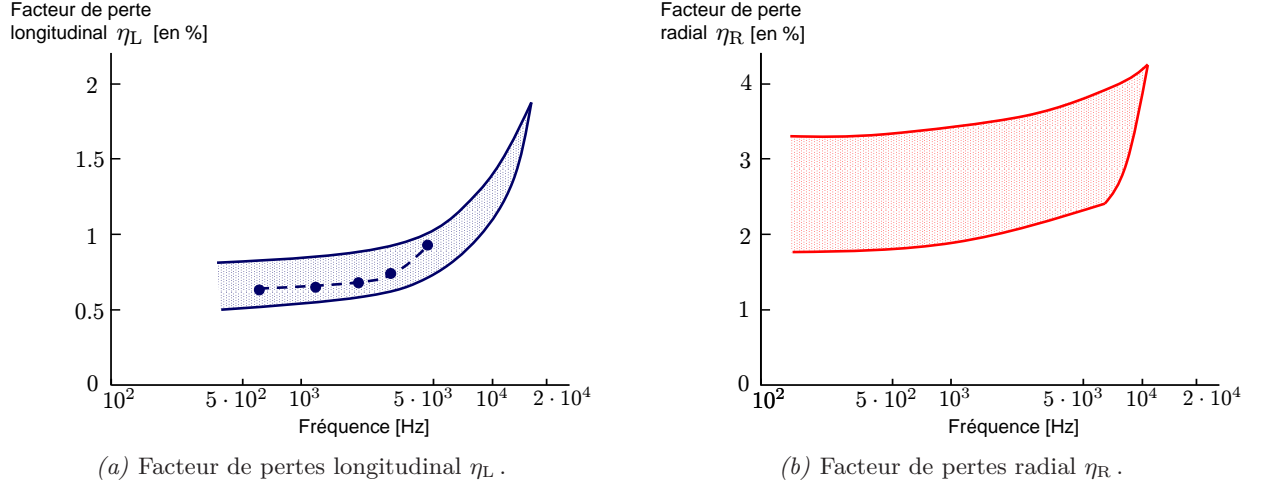


FIG. E.1 – Pertes internes viscoélastiques de l'épicéa en fonction de la fréquence, et pour les deux axes principaux d'orthotropie L et R. Pour chacune des deux directions, la zone ombragée représente l'ensemble des mesures effectuées par Haines [58] sur différents échantillons et essences d'épicéa. Les facteurs de pertes peuvent être considérés comme constants pour  $f < 4$  kHz, puis augmentent avec la fréquence. Cet accroissement est confirmé par les mesures effectuées par Fukada [54] (—) sur un échantillon d'épicéa coupé dans la direction L.

modal  $\eta_{mn}$  du mode  $(m, n)$  d'une telle plaque<sup>2</sup> peut s'écrire d'après le principe de Rayleigh comme une somme pondérée des  $\eta_i$  (supposés constants avec la fréquence) :

$$\eta_{mn} = Q_{mn}^{-1} = \sum_{i=1}^4 \eta_i J_{i,mn} \quad (\text{E.4})$$

où  $Q_{mn}$  est appelé *facteur de qualité modal*, et où les coefficients de pondérations  $J_{i,mn}$  dépendent des pulsations propres  $\omega_{mn}$  et des déformées modales  $\Phi_{mn}$  :

$$\begin{aligned} J_{1,mn} &= \frac{\int_S h^3 D_1 \left( \frac{\partial^2 \Phi_{mn}}{\partial x^2} \right)^2 dS}{\omega_{mn}^2 \|\Phi_{mn}\|^2} & ; & & J_{2,mn} &= \frac{\int_S h^3 D_2 \frac{\partial^2 \Phi_{mn}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi_{mn}}{\partial y^2} dS}{\omega_{mn}^2 \|\Phi_{mn}\|^2} \\ J_{3,mn} &= \frac{\int_S h^3 D_3 \left( \frac{\partial^2 \Phi_{mn}}{\partial y^2} \right)^2 dS}{\omega_{mn}^2 \|\Phi_{mn}\|^2} & ; & & J_{4,mn} &= \frac{\int_S h^3 D_4 \left( \frac{\partial^2 \Phi_{mn}}{\partial x \partial y} \right)^2 dS}{\omega_{mn}^2 \|\Phi_{mn}\|^2} \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

avec comme définition de la norme :  $\|\Phi_{mn}\|^2 = \int_S \rho h \Phi_{mn}^2 dS$ . Les coefficients  $J_{i,mn}$  traduisent les contributions relatives de chacune des constantes de rigidités  $D_i$  dans l'expression de l'énergie potentielle du mode  $(m, n)$  et vérifient pour chaque mode  $J_{1,mn} + J_{2,mn} + J_{3,mn} + J_{4,mn} = 1$ . Une manière simple et rapide d'obtenir une estimation des facteurs de pertes viscoélastique  $\eta_i$  d'une plaque orthotrope spéciale est de mesurer les fréquences et amortissements des premiers modes de la plaque aux conditions aux limites supposées libres (conditions facilement réalisables

<sup>2</sup>L'indexation sous la forme indicelle  $mn$  est celle retenue dans le cas des modes de plaques. Le facteur de pertes  $\eta_{mn}$  du mode  $(m, n)$  ne doit pas être confondu avec le facteur de pertes intermodal défini à la section 2 de l'annexe B.

expérimentalement). Pour les modes de flexion pure  $(m, 0)$  suivant l'axe  $x$  (respectivement  $(0, n)$  suivant l'axe  $y$ ) l'influence de la constante de rigidité correspondante  $D_1$  (respectivement  $D_3$ ) est prépondérante et  $J_{1,m0}$  (respectivement  $J_{3,0n}$ ) est proche de l'unité ; les trois autres  $J_i$  respectifs étant proches de zéro (dans la mesure où l'on néglige l'influence des coefficients de Poisson). Les facteurs de pertes mesurés pour ces modes de flexion pure donnent donc directement une estimation du facteur de pertes  $\eta_1$  (respectivement  $\eta_3$ ) recherché. Le facteur de pertes  $\eta_4$  peut être estimé de manière similaire : pour les modes de torsion pure (le premier mode de la plaque libre par exemple) l'influence de  $D_4$  est prépondérante.  $J_{4,mn}$  est alors proche de l'unité et les autres coefficients  $J_i$  sont proches de zéro pour ce mode. Dans un second temps, une estimation plus précise peut être obtenue en minimisant l'erreur quadratique sur les facteurs de pertes entre les valeurs mesurées et celles calculées par l'équation E.4 (à l'aide de méthodes de Rayleigh ou de Ritz-Rayleigh par exemple). Cette méthode a été mise en œuvre par McIntyre et Woodhouse [90] sur des plaques en bois de résonance destinées à la lutherie, taillées dans le plan LR. Les facteurs de pertes viscoélastiques de l'épicéa mesurés ainsi, sont :

$$\begin{cases} \eta_1 = \eta_L \approx 0.5\% \\ \eta_3 = \eta_R \approx 2.2\% \\ \eta_4 \approx 1.6\% \end{cases} \quad (\text{E.6})$$

ce qui est cohérent avec les mesures de Haines. Les auteurs ont par ailleurs montré que l'influence de  $D_2$  (et donc de  $\eta_2$ ) est négligeable sur l'amortissement face aux autres contributions (les  $J_{2,mn}$  sont très faibles pour l'ensemble des modes). Ceci a été confirmé par des mesures similaires effectuées par Lambourg avec la même méthode [75].

## 1.2 Thermoélasticité dans les plaques métalliques

L'amortissement thermoélastique dans les plaques minces provient du couplage entre les ondes de flexion et les ondes de chaleur dans l'épaisseur de la plaque. La dissipation résulte des échanges de chaleur entre les parties comprimées (*échauffées*) et étirées du matériau déformé. Dans le cas du bois, dont la conductivité thermique  $\kappa_{th}$  est très faible (environ  $0.04\text{--}0.4 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ , [31]), on peut considérer les pertes d'origines thermoélastique comme négligeables. À l'inverse, pour les matériaux métalliques comme l'aluminium par exemple ( $\kappa_{th} \approx 105\text{--}250 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ , [31]) c'est la première cause de dissipation en basses fréquences<sup>3</sup>.

Nous nous contenterons de donner ici l'expression du facteur de pertes thermoélastiques d'une plaque mince isotrope. Le modèle adopté est celui de Chaigne et Lambourg [32] établi pour des plaques minces orthotropes et repris par Arcas [2] dans le cas isotrope. D'après les auteurs le

<sup>3</sup>Les facteurs de pertes viscoélastiques sont très faibles pour les matériaux métalliques : de l'ordre de  $0.3\text{--}10 \cdot 10^{-5}$  pour l'aluminium d'après Cremer [39].

facteur de pertes peut être approché par :

$$\eta(\omega) \approx \frac{\omega RC}{\omega^2 h^2 + C^2/h^2} \quad (\text{E.7})$$

où  $R = \frac{8T_0\phi_{th}^2}{\pi^4\rho C_\epsilon D}$  et  $C = \frac{\kappa_{th}\pi^2}{\rho C_\epsilon}$ .  $T_0$  est la température absolue,  $C_\epsilon$  est la chaleur spécifique à déformation constante, et  $\phi_{th} = \beta_{th} \frac{E}{1-2\nu}$  est appelé coefficient thermique du matériau défini en fonction du coefficient de dilatation thermique linéaire  $\beta_{th}$ . Le facteur d'amortissement  $\alpha(\omega)$  (ou amortissement temporel) en  $[\text{s}^{-1}]$  est alors :

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega \eta(\omega)}{2} \approx \frac{\omega^2 RC}{2(\omega^2 h^2 + C^2/h^2)} \quad (\text{E.8})$$

et tend en hautes fréquences vers sa valeur asymptotique  $\alpha_\infty = \frac{RC}{2h^2}$ , inversement proportionnelle au carré de l'épaisseur de la plaque. Écrit sous cette forme, on voit bien que le facteur d'amortissement asymptotique  $\alpha_\infty$  est une fonction croissante de  $C$  et donc de la conductivité thermique  $\kappa_{th}$ . À titre d'illustration nous présentons à la figure E.2 l'allure de  $\alpha(\omega)$  pour une des plaques en aluminium que nous étudions au chapitre 2, lors de l'étape de validation de notre méthode d'analyse modale.

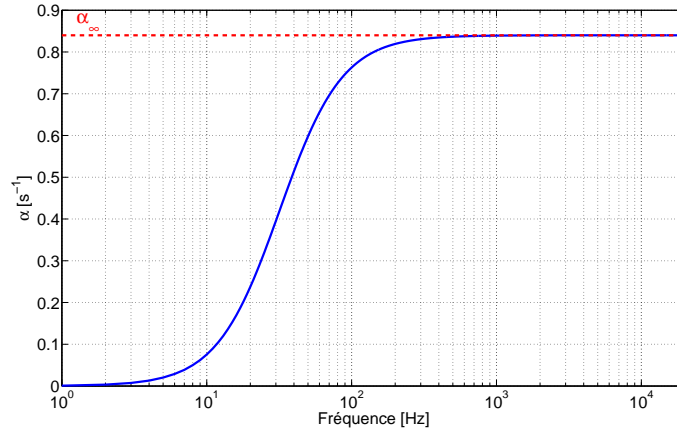


FIG. E.2 – Facteur d'amortissement thermoélastique  $\alpha$  en  $[\text{s}^{-1}]$  d'une plaque en aluminium de 2 mm d'épaisseur, et dont les paramètres thermoélastiques sont  $R = 8.45 \cdot 10^{-3}$  (sans dimension) et  $C = 8.0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  d'après [32].

## 2 Amortissement par rayonnement

Une plaque finie couplée à un fluide environnant transfère à celui-ci une partie de son énergie vibratoire sous forme de pression acoustique. En basses fréquences, l'amortissement par rayonnement qui en résulte est faible et le plus souvent négligeable. Lorsque la fréquence augmente,

l'*efficacité de rayonnement* augmente et cette source de pertes peut alors devenir prépondérante sur les autres phénomènes dissipatifs pour les matériaux dont les pertes intrinsèques sont très faibles, comme pour l'aluminium en particulier<sup>4</sup>.

Nous introduisons ici les notions de *fréquence critique* et de *domaine critique* pour les matériaux orthotropes en considérant tout d'abord le cas d'une plaque infinie couplée à un fluide léger. Puis, nous rappelons le calcul des efficacités modales de rayonnement proposé par Wallace [119]–[120] pour une plaque finie aux conditions aux limites simplement supportée et placée dans un écran infini. À titre d'illustration de ce calcul dans le cas orthotrope, le rayonnement d'une plaque en épicea de 8 mm d'épaisseur sera étudié.

## 2.1 Rayonnement d'une plaque mince infinie

La relation de dispersion d'une plaque mince infinie (supposée isotrope dans un premier temps) rayonnant par ses deux faces dans un même fluide est donnée par Lesueur [82] :

$$Dk_f^4 = \rho h \omega^2 - 2i\omega^2 \frac{\rho_a}{\sqrt{k^2 - k_f^2}} \quad (\text{E.9})$$

où  $k_f$  est le nombre d'onde de flexion de la plaque couplée au fluide,  $k = \omega/c_a$  le nombre d'onde acoustique dans le fluide environnant,  $\rho_a$  la densité du fluide et  $c_a$  la célérité du son dans le fluide. En introduisant la variable complexe  $\bar{a} = \sqrt{k_f^2 - k^2} = i k_z$  la relation E.9 s'écrit :

$$\bar{a}^5 + 2\bar{a}^3 k^2 + \bar{a}(k^4 - k_v^4) - \frac{2\rho_a}{\rho h} k_v^4 = 0 \quad (\text{E.10})$$

où  $k_v = \sqrt{\omega} \left( \frac{\rho h}{D} \right)^{1/4}$  est le nombre d'onde de flexion de la plaque *in vacuo*. Le terme  $\frac{2\rho_a}{\rho h} k_v^4$  représente la charge acoustique du fluide. Pour les plaques rayonnant dans l'air, on peut faire l'approximation de *couplage avec un fluide léger* [82] qui consiste à négliger ce terme, petit devant 1. La relation de dispersion E.10 se simplifie alors [29] :

$$(\bar{a}^2 + k^2)^2 = k_v^4 = k_f^4 \quad (\text{E.11})$$

Cette équation admet deux solutions respectant la condition de *Sommerfeld* (pression nulle à l'infini) :

1.  $\bar{a} = i\sqrt{k_v^2 + k^2}$  ;  $k_f = i k_v$ . L'onde de flexion est *évanescence* dans la plaque.
2.  $\bar{a} = \sqrt{k_v^2 - k^2}$  ;  $k_f = k_v$ . L'onde de flexion est *progressive* dans la plaque. Le nombre d'onde de flexion de la plaque couplée au fluide léger reste égal au nombre d'onde de la plaque *in vacuo*.

<sup>4</sup>Pour les tables d'harmonie en épicea, aucun des deux mécanismes de dissipation (pertes internes viscoélastiques et rayonnement acoustique) n'est *a priori* dominant en moyennes et hautes fréquences. Les deux mécanismes doivent alors être considérés.

**Fréquence critique et rayonnement :** Les équations de dispersion de la plaque et du milieu fluide ont une solution commune, pour  $f = f_c = \frac{c_a^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$  appelée *fréquence critique*. Dans le cas propagatif (solution 2),  $k = k_v$  à cette fréquence et les vitesses de phase des milieux fluide et mécanique sont égales ( $c_a = c_v$ ) : on dit qu'il y a *adaptation des fronts d'ondes* ( $\lambda = \lambda_v$ ). Cette fréquence revêt donc une importance particulière pour une plaque infinie. Elle délimite deux domaines distincts :

- Pour  $f < f_c$  (c'est à dire  $k_v > k$ ) les ondes de flexions progressives sont subsoniques ( $c_v < c_a$ ). La plaque ne rayonne pas. L'effet du milieu fluide est du type inertiel (masse ajoutée) [40].
- Pour  $f > f_c$  ( $k_v < k$ ) les ondes de flexion progressives sont supersoniques :  $c_v > c_a$ . L'énergie est transmise au fluide environnant sous forme de rayonnement. Les longueurs d'ondes dans l'air sont plus courtes que dans la plaque ; l'onde plane rayonnée se propage alors dans la direction  $\theta$  (par rapport à la normale à la plaque) définie par  $\sin \theta = \frac{\lambda}{\lambda_v} = \frac{k_v}{k}$ . Plus la fréquence augmente, plus la direction de propagation tend à se rapprocher à la normale à la plaque.

L'*amortissement par rayonnement* qui en résulte peut se calculer facilement en considérant la pulsation complexe  $\bar{\omega} = \omega + i\alpha_r$  dans l'équation E.9. Le calcul (voir par exemple Lambourg [75]) donne alors le facteur d'amortissement par rayonnement  $\alpha_r$  d'une plaque infinie rayonnant par ses deux faces au dessus de sa fréquence critique :

$$\alpha_r \approx \frac{\rho_a c_a}{\rho h} \frac{1}{\sqrt{1 - \omega_c/\omega}} \quad (\text{E.12})$$

Par analogie au cas isotrope, le **domaine critique** d'une plaque orthotrope est défini comme l'intervalle fréquentiel délimité par les deux fréquences critiques correspondantes à chacune des deux directions d'orthotropie. Il est représenté à la figure E.3 pour la plaque finie en épécéa, d'épaisseur 8 mm, de dimensions  $L_x = 1.39$  m,  $L_y = 0.91$  m et dont les caractéristiques mécaniques sont celles mesurées par Berthaut [13]. On peut noter que l'efficacité de rayonnement – et donc l'amortissement par rayonnement qui en résulte – des modes propres situés dans le domaine critique sont particulièrement importants.

Le rayonnement d'une plaque finie est similaire à celui d'une plaque infinie au dessus de la fréquence critique  $f_c$ . En dessous de  $f_c$ , le rayonnement est faible mais non nul : il a pour origine les *effets de bords* de la plaque finie. La puissance rayonnée dépend alors des déformées modales. Une classification entre *modes de bord* et *modes de coin* peut être faite ; c'est l'objet du paragraphe suivant.

## 2.2 Efficacités modales de rayonnement

Considérons une plaque finie simplement supportée sur son contour et placée dans un écran infini. Nous supposons dans un premier temps que la plaque bafflée ne rayonne que par une seule face  $S = L_x L_y$ . L'efficacité de rayonnement  $\sigma_r$  qui traduit l'efficacité du transfert d'énergie vers le champ acoustique est défini comme le rapport entre la puissance rayonnée par la structure  $P_r$  et la puissance mécanique moyenne communiquée au fluide :

$$\sigma_r = \frac{P_r}{\rho_a c_a S < |\dot{w}|^2 >} \quad (\text{E.13})$$

où l'on rappelle que  $w$  est le déplacement de la plaque. L'efficacité de rayonnement tend vers l'unité au delà de la fréquence critique.

Le facteur de pertes par rayonnement  $\eta_r$  est défini, d'après Cremer [39], comme le rapport entre l'énergie perdue (rayonnée) par le système durant une période  $T$  d'oscillation  $E_r = P_r T = 2\pi P_r / \omega$  et le maximum de l'énergie potentielle (vibratoire)  $E_v = \rho h S < |\dot{w}|^2 >$  multipliée par  $2\pi$ . Il s'écrit en utilisant E.13 :

$$\eta_r = \frac{E_r}{2\pi E_v} = \frac{\rho_a c_a}{\omega \rho h} \sigma_r \quad (\text{E.14})$$

Si la plaque rayonne par ses deux faces ( $S = 2L_x L_y$ ) le facteur de pertes est le double de celui donné à l'équation E.14. On retrouve alors le facteur d'amortissement asymptotique  $\alpha_{r,\infty}$  d'une plaque immergée totalement dans un fluide (équation E.12 avec  $\omega \rightarrow \infty$ ) :

$$\alpha_{r,\infty} = \frac{\rho_a c_a}{\rho h} \quad (\text{E.15})$$

puisque  $\sigma_r \xrightarrow{\infty} 1$  en hautes fréquences.

L'objectif qui est le nôtre ici est d'estimer les facteurs d'amortissements modaux  $\alpha_{mn,r}$  dus au rayonnement pour chacun des modes propres de la plaque finie. Le cas de la plaque simplement supportée et bafflée peut se résoudre facilement car les déformées modales – et par conséquent le champ de vitesses – s'écrivent analytiquement (équation 3.3). Ainsi, Wallace [119] donne l'expression des efficacités modales  $\sigma_{mn}$  estimées à partir de l'intégrale de Rayleigh, sous l'hypothèse d'un fluide léger et en négligeant la contribution du couplage intermodal. Les  $\sigma_{mn}$  se présentent sous la forme d'intégrales doubles dans le demi-espace :

$$\sigma_{mn} = \frac{64k^2 L_x L_y}{\pi^6 m^2 n^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{\begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix}(\xi/2) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix}(\zeta/2)}{\left[ \left( \frac{\xi}{m\pi} \right)^2 - 1 \right] \left[ \left( \frac{\zeta}{n\pi} \right)^2 - 1 \right]} \right)^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \quad (\text{E.16})$$

où  $\xi = kL_x \sin \theta \cos \varphi$ ,  $\zeta = kL_y \sin \theta \sin \varphi$ , et où on utilise au numérateur la fonction **cosinus** lorsque  $m$  ou  $n$  est impair et la fonction **sinus** lorsque  $m$  ou  $n$  est pair. Les facteurs d'amortisse-



ment qui en résultent s'écrivent (plaque rayonnant par ses deux faces) [120] :  $\alpha_{mn,r} = \frac{\rho_a c_a}{\rho h} \sigma_{mn}$ . Afin d'illustrer ce calcul nous présentons aux figures E.4 et E.5 les efficacités modales et les facteurs d'amortissements modaux de la plaque en épicea orthotrope *spéciale* (taillée suivant les axes d'orthotropie), en nous plaçant dans les mêmes conditions que Wallace et en nous inspirant des travaux de Anderson [1] sur le rayonnement des plaques orthotropes.

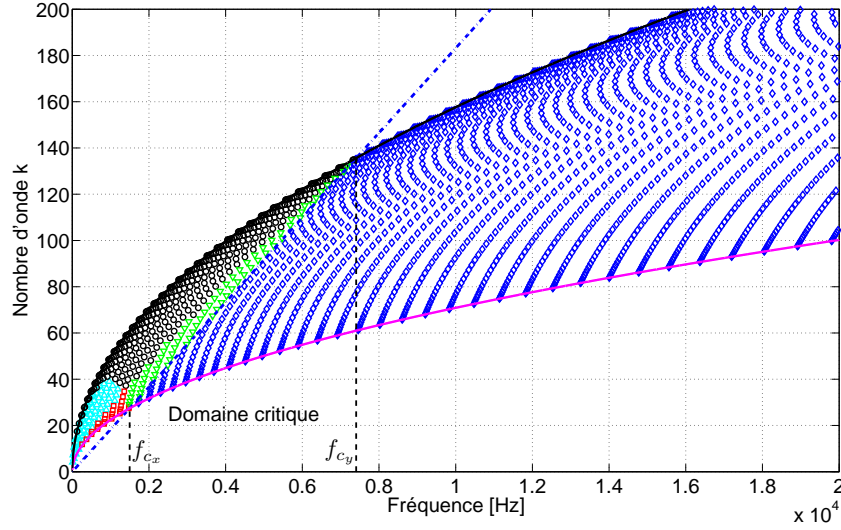


FIG. E.3 – Relations de dispersions dans les deux directions d'orthotropie et domaine critique de la plaque orthotrope en épicea. Suivant  $x$  (—) :  $k_{v,x} = \sqrt{\omega}(\rho h/D_x)^{1/4}$ ; suivant  $y$  (—) :  $k_{v,y} = \sqrt{\omega}(\rho h/D_y)^{1/4}$ ; dans l'air (---) :  $k = \omega/c_a$ . Les valeurs discrètes  $k_{mn}$  correspondent aux modes de la plaque supposée simplement supportée et bafflée. Ils sont regroupés par *classes* de rayonnement.  $\triangle$  : modes de *coin*;  $\circ$  : modes de *bord x*;  $\square$  : modes de *bord y*;  $\nabla$  : modes de *surface incomplète*;  $\diamond$  : modes de *surface*.

Les  $\sigma_{mn}(\omega_{mn})$  sont représentés en trois dimensions en fonction des paramètres sans dimensions  $a_{mn} = k_{v,x_m}/k = \frac{m\pi c_a}{\omega_{mn} L_x}$  et  $b_{mn} = k_{v,y_n}/k = \frac{n\pi c_a}{\omega_{mn} L_y}$ , où les  $k_{v,x_m}$  et  $k_{v,y_n}$  sont les composantes des nombres d'ondes de la plaque *in vacuo* dans la direction  $x$  et  $y$  (données à l'équation 3.4). On observe que les efficacités modales sont très différentes suivant les types de modes. La classification des modes rayonnants (dans l'ordre croissant d'efficacité de rayonnement) est la suivante, d'après Lesueur [82] ou Williams [125] :

- Rayonnement de *coin* ( $\triangle$  sur les figures) :  $a_{mn} > 1$  et  $b_{mn} > 1$ . Les zones de la plaque en oppositions de phases tendent à s'annuler. Le *court-circuit* a lieu sur toute la plaque à l'exception des quatre coins qui sont alors les seules zones efficaces du point de vue du rayonnement.
- Rayonnement de *bord x* ( $\circ$ ) :  $a_{mn} < 1$  et  $b_{mn} > 1$ . Les contributions au rayonnement des zones de la plaque s'annulent cette fois *par bandes*. La zone effective de rayonnement se réduit à deux bandes parallèles à l'axe  $x$  situées près des bords en  $y = 0$  et  $y = L_y$ .
- Rayonnement de *bord y* ( $\square$ ) :  $a_{mn} > 1$  et  $b_{mn} < 1$ . De même que précédemment, la zone

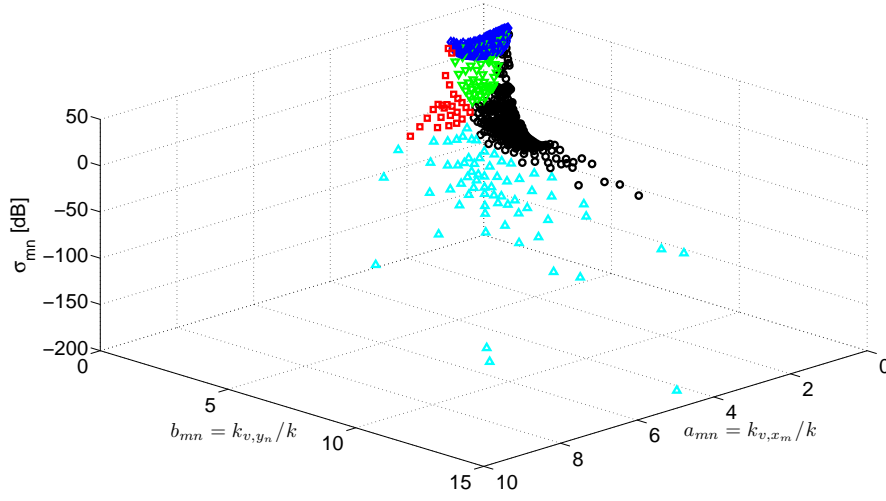


FIG. E.4 – Efficacités modales de rayonnement  $\sigma_{mn}$  en fonction des paramètres adimensionnels  $a_{mn} = k_{v,x_m}/k$  et  $b_{mn} = k_{v,y_n}/k$ . Par ordre croissant d'efficacité de rayonnement, on a  $\triangle$  : modes de *coin* ;  $\circ$  : modes de *bord x* ;  $\square$  : modes de *bord y* ;  $\nabla$  : modes de *surface incomplète* ;  $\diamond$  : modes de *surface*.

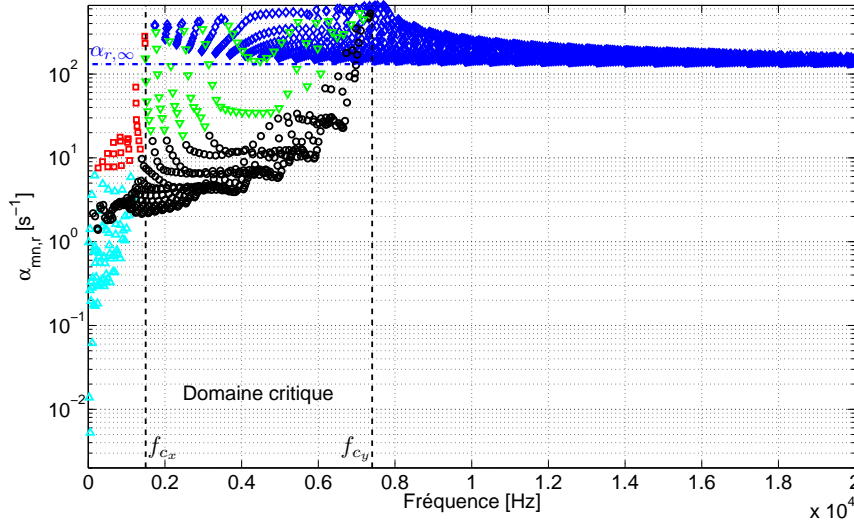


FIG. E.5 – Facteurs d'amortissement par rayonnement  $\alpha_{mn,r}$ . L'amortissement dû au rayonnement tend vers  $\alpha_{r,\infty} = \frac{\rho_a c_a}{\rho h}$  au dessus du domaine critique.  $\triangle$  : modes de *coin* ;  $\circ$  : modes de *bord x* ;  $\square$  : modes de *bord y* ;  $\nabla$  : modes de *surface incomplète* ;  $\diamond$  : modes de *surface*.

effective se réduit à deux bandes, parallèles cette fois à l'axe  $y$ .

- Rayonnement de *surface incomplète* (ou de *bord x-y*) ( $\nabla$ ) :  $a_{mn} < 1$  ,  $b_{mn} < 1$  et  $a_{mn}^2 + b_{mn}^2 > 1$ . Les quatre bords de la plaque participent au rayonnement.
- Rayonnement de *surface* ( $\diamond$ ) :  $a_{mn}^2 + b_{mn}^2 < 1$  c'est à dire  $k_v < k$ . Pour ces modes, la plaque se comporte comme une plaque infinie : toute la surface de la plaque participe au

rayonnement. L'efficacité de rayonnement est supérieure à un.  
Les *classes* de rayonnement sont représentées dans le plan d'onde à la figure E.6.

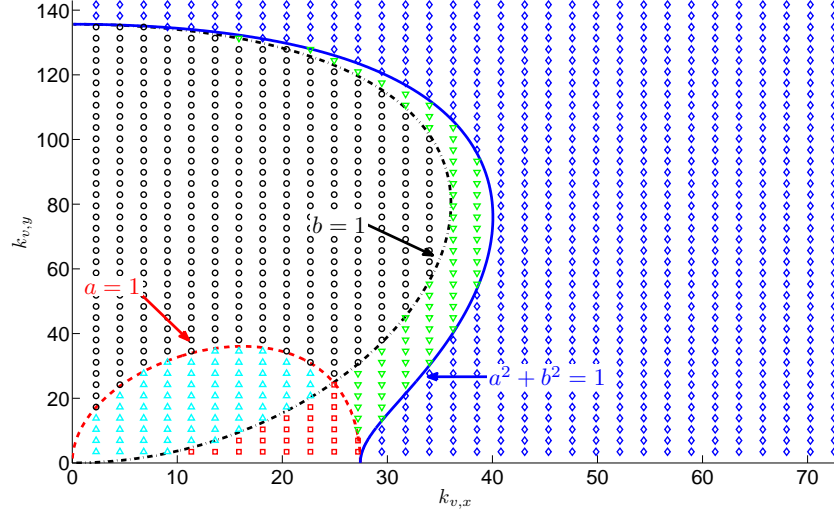


FIG. E.6 – Représentation dans le plan d'onde des *classes* de rayonnement d'une plaque orthotrope simplement supportée et bafflée.  $\triangle$  : modes de *coin* ;  $\circ$  : modes de *bord x* ;  $\square$  : modes de *bord y* ;  $\nabla$  : modes de *surface incomplète* ;  $\diamond$  : modes de *surface*.

Cette classification permet d'expliquer concrètement les grandes disparités en termes de puissance acoustique rayonnée pour les plaques finies en basses fréquences et au voisinage du domaine critique. On voit par exemple à la figure E.5 que les facteurs d'amortissements modaux de la plaque passent d'environ  $10 \text{ s}^{-1}$  avant la première fréquence critique  $f_{c_x}$  à environ  $150\text{--}200 \text{ s}^{-1}$  après la seconde fréquence critique  $f_{c_y}$ .



# Bibliographie

- [1] J. S. Anderson and M. Bratos-Anderson. Radiation efficiency of rectangular orthotropic plates. *Acta Acustica United with Acustica*, 91(1) :61–76, 2005.
- [2] K. Arcas Castillo. *Simulation numérique d'un réverbérateur à plaque*. Thèse de doctorat, École doctorale de l'École Polytechnique, 2009.
- [3] M. F. Ashby. *Materials selection in mechanical design*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2004.
- [4] A. Askenfelt. *Five lectures on the acoustics of the piano*. Royal Swedish Academy of Music, Stockholm, 1990.
- [5] A. Askenfelt. Sound radiation and timbre. In *Mechanics of Playing and Making Musical Instruments*, CISM, Udine, Italy, 2006.
- [6] A. Askenfelt. Structure piano. In *Mechanics of Playing and Making Musical Instruments*, CISM, Udine, Italy, 2006.
- [7] A. Askenfelt and E. V. Jansson. On vibration sensation and finger touch in stringed instrument playing. *Music Perception*, 9(3) :311–349, 1992.
- [8] R. Badeau. *Méthodes à haute résolution pour l'estimation et le suivi de sinusoïdes modulées. Application aux signaux de musique*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Télécommunications, 2005.
- [9] R. Badeau, B. David, and G. Richard. A new perturbation analysis for signal enumeration in rotational invariance techniques. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54(2) :450–458, 2006.
- [10] C.Y. Barlow. Materials selection for musical instruments. In *Proceedings of the ISMA - Institute of Acoustics*, volume 19, pages 69–78, Edinburgh, UK, 1997.
- [11] M. A. Bernier. *Modélisation du comportement vibratoire d'une plaque en moyennes fréquences*. Thèse de doctorat, Université de Sherbrooke, 1997.
- [12] P. A. Bert. Laminated soundboard for a string instrument. United States Patents, 1969.
- [13] J. Berthaut. *Contribution à l'identification large bande des structures anisotropes. Application aux tables d'harmonie des pianos*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2004.
- [14] J. Berthaut, M. N. Ichchou, and L. Jezequel. Piano soundboard : structural behavior, numerical and experimental study in the modal range. *Applied Acoustics*, 64(11) :1113–1136, 2003.

- 
- [15] P. H. Bilhuber and C. A. Johnson. The influence of the soundboard on piano tone quality. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 11(3) :311–320, 1940.
- [16] P.H. Bilhuber. Soundboard for pianos and other instruments or devices using soundboards. United States Patents, 1936.
- [17] E. D. Blackham. Physics of piano. *Scientific American*, 213(6) :88–99, 1965.
- [18] V. V. Bolotin. The edge effect in the oscillations of elastic shells. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 24 :1257–1272, 1960.
- [19] V. V. Bolotin. The density of eigenvalues in vibration problems of elastic plates and shells. *Proceedings of Vibration Problems*, 6 :341–351, 1965.
- [20] R. H. Bolt. Note on normal frequency statistics for rectangular rooms. *Journal of the Acoustical Society of America*, 18(1) :130–133, 1946.
- [21] R. H. Bolt. Normal frequency spacing statistics. *Journal of the Acoustical Society of America*, 19(1) :79–90, 1947.
- [22] G. Borello. Analyse statistique énergétique SEA. *Techniques de l'ingénieur*, R6215 :1–22, 2006.
- [23] X. Boutillon and G. Weinreich. Three-dimensional mechanical admittance : Theory and new measurement method applied to the violin bridge. *Journal of the Acoustical Society of America*, 105(6) :3524–3533, 1999.
- [24] I. Brémaud. Caractérisation mécanique des bois et facture : origines et recensement de la variabilité. In *Journée d'étude - Le bois : instrument du patrimoine musical*, Cité de la musique, Paris, 2008.
- [25] V. Bucur. *Acoustics of Wood, second edition*. Springer Verlag, 2006.
- [26] I. J. Busch-Vishniac. Drive point impedance of an infinite orthotropic plate under tension. *Journal of the Acoustical Society of America*, 71(2) :368–371, 1982.
- [27] A. Caracciolo and C. Valette. Damping mechanisms governing plate vibration. *Acta Acustica*, 3(5) :393–404, 1995.
- [28] J. F. Caron. Modèle de plaques multicouches. Notes de cours. Navier - ENPC, 2008.
- [29] A. Chaigne. *Ondes acoustiques*. Editions de l'Ecole polytechnique, 2001.
- [30] A. Chaigne and V. Doutaut. Numerical simulations of xylophones. I. Time-domain modeling of the vibrating bars. *Journal of the Acoustical Society of America*, 101(1) :539–557, 1997.
- [31] A. Chaigne and J. Kergomard. *Acoustique des instruments de musique*. Belin, Paris, 2008.
- [32] A. Chaigne and C. Lambourg. Time-domain simulation of damped impacted plates. I. Theory and experiments. *Journal of the Acoustical Society of America*, 109(4) :1422–1432, 2001.
- [33] R. M. Christensen. *Theory of viscoelasticity*. Dover Publications, second edition, 2003.
- [34] H. A. Conklin. Soundboard construction for stringed musical instruments. United States Patents, 1975.

- [35] H. A. Conklin. Design and tone in the mechanoacoustic piano. Part 2. Piano structure. *Journal of the Acoustical Society of America*, 100(2) :695–708, 1996.
- [36] P. Cordonnier-Cloarec. *Contribution à l'étude du rayonnement acoustique de parois métalliques nervurées*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1989.
- [37] R. Courant. Über die Schwingungen eigenspannter Platter. *Mathematische Zeitschrift*, 15 :193–200, 1922.
- [38] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*, volume 1. Interscience Publishers, Inc., New-York, 1953.
- [39] L. Cremer, M. Heckl, and Petersson. *Structure-Borne Sound*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2005.
- [40] B. David. *Caractérisations acoustiques de structures vibrantes par mise en atmosphère raréfiée. Méthodes d'estimation relatives aux fréquences et amortissements des modes propres. Applications en acoustique musicale*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1999.
- [41] B. David and X. Boutillon. Using vacuum to measure the acoustical efficiency. In *ISMA 95*, pages 380–385, Dourdan, France, 1995.
- [42] E. De Langre and A. Chaigne. *Dynamique et vibrations*. Cours de l'École Polytechnique, Palaiseau, 2006.
- [43] V. Doutaut. *Étude expérimentale et simulations numériques d'instruments de percussion à clavier*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Télécommunications, 1996.
- [44] P. Dérogis. *Analyse des vibrations et du rayonnement de la table d'harmonie d'un piano droit et conception d'un système de reproduction du champ acoustique*. Thèse de doctorat, Université du Maine, Le Mans, 1997.
- [45] P. Dérogis and R. Caussé. Computation and modelisation of the sound radiation of an upright piano using modal formalism and integral equations. In *ICA : International Congress on Acoustic*, volume 3, pages 409–412, Trondheim, Norvège, 1995.
- [46] P. Dérogis and R. Causse. Characterization of the acoustic radiation of the soundboard of an upright piano. *Journal De Physique IV*, 4(C5) :609–612, 1994.
- [47] K. Ege, X. Boutillon, and B. David. High-resolution modal analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 325(4-5) :852–869, 2009.
- [48] K. Ege, X. Boutillon, B. David, and J. Lozada. Estimation modale haute résolution. In *18<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique*, Grenoble, France, 2007.
- [49] I. Elishakoff. Distribution of natural frequencies in certain structural elements. *Journal of the Acoustical Society of America*, 57(2) :361–369, 1975.
- [50] D. J. Ewins. *Modal Testing*. Research studies press, 1984.
- [51] F. J. Fahy and E. Lindqvist. Wave-propagation in damped, stiffened structures characteristic of ship construction. *Journal of Sound and Vibration*, 45(1) :115–138, 1976.
- [52] D.D. Fandrich. Soundboard technology and manufacture. *The Designer's Notebook, Piano-Builders/NW*, 1995.



- 
- [53] A. Farina. Simultaneous measurement of impulse response and distortion with a swept-sine technique. In *108th Convention of the Audio Engineering Society*, Paris, France, 2000.
  - [54] E. Fukada. Vibrational study of the wood used for the sound boards of pianos. *Nature*, 166(4227) :772–773, 1950.
  - [55] N. Giordano. Mechanical impedance of a piano soundboard. *Journal of the Acoustical Society of America*, 103(4) :2128–2133, 1998.
  - [56] K. Graff. *Wave Motion in Elastic Solids*. Dover, New York, 1975.
  - [57] M. Gérardin and D. Rixen. *Théorie des vibrations. Applications à la dynamique des structures*. Masson, Paris, 1992.
  - [58] D. W. Haines. On musical instrument wood. *Catgut Acoustical Society Newsletter*, 31 :23–32, 1979.
  - [59] D. W. Haines. Construction material for stringed musical instruments. United States Patents, 1982.
  - [60] R.F.S. Hearmon. *The elasticity of wood and plywood. Forest Products Research special report no.7*. H.M. Stationery Office, London, 1948.
  - [61] M. Heckl. Untersuchung an orthotropen Platten. *Acustica*, 10 :109–115, 1960.
  - [62] D. Holz. Untersuchungen an Resonanzholz. III. Mitteilung : über die gleichzeitige Bestimmung des dynamischen Elastizitätsmoduls und der Dämpfung an Holzsteben im hörbaren Frequenzbereich. *Holztechnologie*, 8(4) :221–224, 1967.
  - [63] D. Holz. On some relations between anatomic properties and acoustical qualities of resonance wood. *Holztechnologie*, 25(1) :31–36, 1984.
  - [64] L. Houillon. *Modélisation vibratoire des carrosseries automobiles en moyennes et hautes fréquences*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 1999.
  - [65] Y. Hua and T. K. Sarkar. Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise. *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, 38(5) :814–824, 1990.
  - [66] Y. Hua and T. K. Sarkar. On SVD for estimating generalized eigenvalues of singular matrix pencil in noise. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 39(4) :892–900, 1991.
  - [67] T. C. Hundley, H. Benioff, and D. W. Martin. Factors contributing to multiple rate of piano tone decay. *Journal of the Acoustical Society of America*, 64(5) :1303–1309, 1978.
  - [68] C. M. Hutchins. Wood for violin. *Catgut Acoustical Society Newsletter*, 1978.
  - [69] M. N. Ichchou. *Formulation énergétique pour l’étude moyennes et hautes fréquences des systèmes : théorie et application*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 1996.
  - [70] M. N. Ichchou, J. Berthaut, and M. Collet. Multi-mode wave propagation in ribbed plates : Part I, wavenumber-space characteristics. *International Journal of Solids and Structures*, 45(5) :1179–1195, 2008.

- [71] M. N. Ichchou, J. Berthaut, and M. Collet. Multi-mode wave propagation in ribbed plates. Part II : Predictions and comparisons. *International Journal of Solids and Structures*, 45(5) :1196–1216, 2008.
- [72] R. J. Kaman, C. H. Mayerjak. Soundboard assembly for pianos or the like. united states patents, 1982.
- [73] C. S. Kim and S. M. Dickinson. Improved approximate expressions for the natural frequencies of isotropic and orthotropic rectangular-plates. *Journal of Sound and Vibration*, 103(1) :142–149, 1985.
- [74] J. Kindel and I.-C. Wang. Modal analysis and finite element analysis of a piano soundboard. In *Proceedings of the 5th International Modal Analysis Conference*, pages 1545–1549, Union College, Schenectady, New York, 1987.
- [75] C. Lambourg. *Modèle temporel pour la simulation numérique de plaques vibrantes. Application à la synthèse sonore*. Thèse de doctorat, Université du Maine, 1997.
- [76] C. Lambourg and A. Chaigne. Measurements and modeling of the admittance matrix at the bridge in guitars. In *Proceedings of SMAC'93*, pages 448–453, Stockholm, 1993.
- [77] R. S. Langley. Spatially averaged frequency-response envelopes for one-dimensional and 2-dimensional structural components. *Journal of Sound and Vibration*, 178(4) :483–500, 1994.
- [78] R. S. Langley. The modal density of anisotropic structural components. *Journal of the Acoustical Society of America*, 99(6) :3481–3487, 1996.
- [79] J. Laroche. The use of the matrix pencil method for the spectrum analysis of musical signals. *Journal of the Acoustical Society of America*, 94(4) :1958–1965, 1993.
- [80] J. L. Le Carrou. *Vibro-acoustique de la harpe de concert*. Thèse de doctorat, Université du Maine, 2006.
- [81] J. L. Le Carrou, F. Gautier, and R. Badeau. Sympathetic string modes in the concert harp. *Acta Acustica United with Acustica*, 95(4) :744–752, 2009.
- [82] C. Lesueur. *Rayonnement acoustique des structures*. Eyrolles, 1988.
- [83] E. Lieber. The influence of the soundboard on piano sound. *Das Musikinstrument*, 28 :304–316, 1979.
- [84] R. H. Lyon. *Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems : Theory and Applications*. MIT press, Cambridge, 1975.
- [85] R. H. Lyon and G. Maidanik. Power flow between linearly coupled oscillators. *Journal of the Acoustical Society of America*, 34(5) :623–639, 1962.
- [86] R.H. Lyon and R.G. Dejong. *Theory and Application of Statistical Energy Analysis (second edition)*. Butterworth Heinemann, 1995.
- [87] A. Mamou-Mani, J. Frelat, and C. Besnainou. Numerical simulation of a piano soundboard under downbearing. *Journal of the Acoustical Society of America*, 123(4) :2401–2406, 2008.

- 
- [88] S. Marcadet and H. Martin. *Étude acoustique et conception d'une table d'harmonie de violon en matériaux composites*. Rapport de module expérimental de mécanique - matériaux composites., École polytechnique, 2009.
  - [89] M. E. McIntyre and J. Woodhouse. Influence of geometry on linear damping. *Acustica*, 39(4) :209–224, 1978.
  - [90] M. E. McIntyre and J. Woodhouse. On measuring the elastic and damping constants of orthotropic sheet materials. *Acta Metallurgica*, 36(6) :1397–1416, 1988.
  - [91] R. D. Mindlin. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme*, 18(1) :31–38, 1951.
  - [92] T. R. Moore and S. A. Zietlow. Interferometric studies of a piano soundboard. *Journal of the Acoustical Society of America*, 119(3) :1783–1793, 2006.
  - [93] I. Nakamura. The vibrational character of the piano soundboard. In *Proceedings of the 11th ICA*, volume 4, pages 385–388, Paris, 1983.
  - [94] T.R.T. Nightingale and I. Bosmans. On the drive-point mobility of a periodic rib-stiffened plate. In *Inter-Noise 2006*, pages 1–10, Honolulu, Hawaii, 2006.
  - [95] M. P. Norton. *Fundamentals of noise and vibration analysis for engineers*. Cambridge university press, 1989.
  - [96] E. Obataya, T. Ono, and M. Norimoto. Vibrational properties of wood along the grain. *Journal of Materials Science*, 35(12) :2993–3001, 2000.
  - [97] F. G. O. Pearson and C. Webster. *Timber used in the musical industry. Forest Products Laboratory*. Ministry of Technology, London, 1967.
  - [98] J. Piranda. Analyse modale expérimentale. *Techniques de l'ingénieur*, R6180 :1–29, 2001.
  - [99] V. F. Pisarenko. The retrieval of harmonics from a covariance function. *Geophysical J. Royal Astron. Soc.*, 33 :347–366, 1973.
  - [100] E. Rajcan. Some differences in physico-acoustic characteristics of resonant and standard spruce wood. *Acustica*, 48(1) :58–60, 1981.
  - [101] M. Rébillat, R. Hennequin, B. F. G. Katz, and E. Corteel. Identification of cascade hammerstein models for the description of non-linearities in acoustic devices. *Soumis au JSV*, 2010.
  - [102] K. Renji, P. S. Nair, and S. Narayanan. Modal density of composite honeycomb sandwich panels. *Journal of Sound and Vibration*, 195(5) :687–699, 1996.
  - [103] G. M. Riche de Prony. Essai expérimental et analytique. *Journal de l'école polytechnique*, 1(22) :24–76, 1795.
  - [104] R. Roy and T. Kailath. ESPRIT - estimation of signal parameters via rotational invariance techniques. *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, 37(7) :984–995, 1989.

- [105] R. Roy, A. Paulraj, and T. Kailath. ESPRIT - a subspace rotation approach to estimation of parameters of cisoids in noise. *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, 34(5) :1340–1342, 1986.
- [106] J. C. Schelleng. Violin as a circuit. *Journal of the Acoustical Society of America*, 35(3) :326–338, 1963.
- [107] M. Schleske. Soundboard of composite fiber material construction. United States Patents, 2004.
- [108] R. Schmidt. *A signal subspace approach to multiple emitter location and spectral estimation*. Phd thesis, Stanford University, Stanford, California, 1981.
- [109] G. Schwichtenberg. Piano soundboard. United States Patents, 1982.
- [110] L. W. Sepmeyer. Computed frequency and angular distribution of normal modes of vibration in rectangular rooms. *Journal of the Acoustical Society of America*, 37(3) :413–423, 1965.
- [111] E. J. Skudrzyk. Vibrations of a system with a finite or an infinite number of resonances. *Journal of the Acoustical Society of America*, 30(12) :1140–1152, 1958.
- [112] E. J. Skudrzyk. *Simple and complex vibratory systems*. Pennsylvania State University Press, University Park, 1968.
- [113] E. J. Skudrzyk. The mean-value method of predicting the dynamic-response of complex vibrators. *Journal of the Acoustical Society of America*, 67(4) :1105–1135, 1980.
- [114] W. Soedel. *Vibration of Shells and Plates*. Marcel Dekker Inc., New York, third edition, 2004.
- [115] H. Suzuki. Vibration and sound radiation of a piano soundboard. *Journal of the Acoustical Society of America*, 80(6) :1573–1582, 1986.
- [116] H. Suzuki and I. Nakamura. Acoustics of pianos. *Applied Acoustics*, 30(2-3) :147–205, 1990.
- [117] S. Timoshenko, S. F. Woinowski-Krieger. *Theory of plates and shells*. McGraw-Hill International Editions, second edition, 1989.
- [118] C. Touzé, O. Thomas, and A. Chaigne. Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates. Part 1 : Theory. *Journal of Sound and Vibration*, 258(4) :649–676, 2002.
- [119] C. E. Wallace. Radiation-resistance of a rectangular panel. *Journal of the Acoustical Society of America*, 51(3) :946–952, 1972.
- [120] C. E. Wallace. The acoustic radiation damping of the modes of a rectangular panel. *Journal of the Acoustical Society of America*, 81(6) :1787–1794, 1987.
- [121] U. G. K. Wegst. Wood for sound. *American Journal of Botany*, 93(10) :1439–1448, 2006.
- [122] G. Weinreich. Coupled piano strings. *Journal of the Acoustical Society of America*, 62(6) :1474–1484, 1977.
- [123] G. Weinreich. Vibration and radiation of structures with application to string and percussion instrument. In *Mechanics of musical instruments*. A. Hirschberg, J. Kergomard, and G. Weinreich (Eds.). Springer-Verlag, Udine, 1995.

- [124] J. P. D. Wilkinson. Modal densities of certain shallow structural elements. *Journal of the Acoustical Society of America*, 43(2) :245–251, 1968.
- [125] E. G. Williams. *Fourier Acoustics : Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography*. Academic Press, New York, 1999.
- [126] K. Wogram. Acoustical research on pianos. Part I : Vibrational characteristics of the soundboard. *Das Musikinstrument*, 24 :694–702, 776–782, 872–880, 1980.
- [127] G. Xie, D. J. Thompson, and C. J. C. Jones. Mode count and modal density of structural systems : relationships with boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 274(3-5) :621–651, 2004.
- [128] T. Yamada, T. Matsumoto. Soundboards for string instruments having plastic foam body with harder outer layers. united states patents, 1973.
- [129] S. Yoshikawa. Acoustical classification of woods for string instruments. *Journal of the Acoustical Society of America*, 122(1) :568–573, 2007.



## Résumé

L'objectif de cette thèse est l'étude du comportement vibratoire de la table d'harmonie du piano dans le domaine des moyennes fréquences. Le premier chapitre est consacré à la table dont on présente le rôle, la structure et les matériaux. Les principaux résultats publiés sont regroupés sous forme d'une synthèse bibliographique. Dans un second chapitre, nous présentons une nouvelle méthode d'analyse modale dite *haute résolution*, permettant de s'affranchir des limitations naturelles de l'analyse de Fourier en termes de résolution spectrale. Celle-ci est validée par comparaison des analyses modales partielles expérimentales et théoriques de plaques minces en aluminium pour des recouvrements modaux compris entre 30% et 70%. Grâce à cette nouvelle méthode, l'identification modale, complète ou partielle, d'une table de piano droit est donnée dans les moyennes fréquences [300-2500 Hz]. L'obtention de l'amortissement moyen propre à la table en épicéa constitue un résultat nouveau dans ce domaine de fréquences. Par ailleurs, l'observation de la densité modale permet de préciser la validité du remplacement de la table raidie par une plaque homogène jusqu'à 1.1 kHz environ. Au-dessus de cette fréquence, la table se comporte comme une juxtaposition de guides d'ondes. L'observation des déformées modales pour ces fréquences, obtenues par un modèle en éléments finis, confirme la localisation des ondes entre les raidisseurs. Le phénomène de coïncidence acoustique se trouve alors profondément modifié par rapport à celui ayant cours pour les plaques minces. L'objectif du dernier chapitre est de proposer une description synthétique d'une table d'harmonie basée sur un petit nombre de *descripteurs globaux* : densité modale, amortissement moyen, espacement inter-raideurs. La validité d'un modèle de plaque homogène équivalente est étudiée et le remplacement de la structure par une plaque en matériau composite est envisagé. La description synthétique permet par exemple d'évaluer les variations de la mobilité au chevalet et du rayonnement dans l'aigu entraînée par une modification de structure (espacement inter-raideurs, épaisseur moyenne).

**Mots clés :** table d'harmonie du piano, analyse modale, vibrations aux moyennes fréquences, rayonnement, acoustique musicale, mécanique des instruments de musique.

## Abstract

The vibratory behaviour of the piano soundboard in the mid-frequency domain is studied in this PhD thesis. The first chapter is devoted to the board itself: its role, structure and materials. An exhaustive bibliographical study is presented and the main published results are given and synthesised. The second chapter introduces a new modal analysis technique based on a high-resolution analysis algorithm. The technique resolves cases where the Fourier transform performs poorly due to its natural  $\Delta T \Delta f$  limitation. This new method is assessed by comparing experimental and theoretical partial modal analyses of aluminium thin plates up to a modal overlap of 70%. The modal identification of an upright piano soundboard is partly achieved with this method in the mid-frequency domain [300-2500 Hz]. The estimation of the mean loss-factors of the spruce board in this frequency domain is a new result. The frequency dependency of the observed modal density of the ribbed-board below 1.1 kHz contributes to define an equivalent homogeneous plate. Above 1.1 kHz, the soundboard behaves like a set of waveguides. The modal shapes obtained through a finite-element model confirm the localisation of the waves between the ribs. On such a structure, the acoustical coincidence phenomenon is deeply modified in comparison to the one occurring in thin plates. The purpose of the last chapter is to propose a synthetic description of a piano soundboard based on a small number of global descriptors: overall dimensions, aspect ratio, mass, modal density, mean loss factor, average distance between two consecutive ribs. The validity of an equivalent homogeneous plate model is studied and the replacement of the structure by a plate in composite material is considered. The synthetic description can be used to predict the changes of the driving-point mobility (at bridge) and of the sound radiation in the treble range resulting from structural modifications (changes in material, geometry, average ribs spacing, etc.).

**Keywords:** piano soundboard, modal analysis, mid-frequency domain vibrations, sound radiation, musical acoustics, mechanics of musical instruments